

## Spis treści

1	Struktura i forma egzaminu maturalnego z matematyki.....	2
2	Opis arkuszy egzaminacyjnych ustalonych przez Centralną Komisję Egzaminacyjną na egzamin maturalny z matematyki w roku szkolnym 2009/2010 .....	2
3	Kartoteki arkuszy egzaminacyjnych z matematyki .....	3
4	Wyniki egzaminu maturalnego z matematyki .....	6
4.1	Rozkłady wyników egzaminu w skali znormalizowanej.....	6
4.2	Analiza statystyczna wyników arkusza podstawowego .....	8
4.2.1	Wskaźniki statystyczne arkusza podstawowego.....	8
4.2.2	Łatwość zadań w obszarach sprawdzanych treści .....	9
4.2.3	Łatwość zadań w obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych.....	9
4.2.4	Łatwość zadań i rozkład ich wyników.....	10
4.3	Analiza statystyczna wyników arkusza rozszerzonego .....	11
4.3.1	Wskaźniki statystyczne arkusza rozszerzonego .....	11
4.3.2	Łatwość zadań w obszarach sprawdzanych treści wymagań egzaminacyjnych.....	12
4.3.3	Łatwość zadań w obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych.....	13
4.3.4	Łatwość zadań i rozkład ich wyników.....	13
4.4	Analiza jakościowa zadań egzaminacyjnych.....	14
5	Podsumowanie i wnioski .....	47



## 1 Struktura i forma egzaminu maturalnego z matematyki

W roku szkolnym 2009/2010 w całym kraju po raz kolejny został przeprowadzony egzamin maturalny dla absolwentów liceów ogólnokształcących (LO), liceów profilowanych (LP), techników (T), uzupełniających liceów ogólnokształcących (LU) i techników uzupełniających (TU).

Egzamin maturalny z matematyki jest egzaminem zewnętrznym i ma formę pisemną. Egzamin maturalny z matematyki jako przedmiot obowiązkowy był zdawany na poziomie podstawowym lub jako przedmiot dodatkowy na poziomie rozszerzonym. Egzamin na poziomie podstawowym trwał 170 minut, a na poziomie rozszerzonym 180 minut i polegał na rozwiązaniu zadań egzaminacyjnych zawartych w jednym arkuszu egzaminacyjnym.

Maksymalna liczba punktów możliwych do uzyskania w obu arkuszach wynosi 50.

W trakcie egzaminu zdający mógł korzystać z zestawu wybranych wzorów matematycznych przygotowanego przez CKE i kalkulatora z podstawowymi działaniami. Wyniki egzaminu zamieszczone na świadectwie dojrzałości wyrażone są w skali procentowej.

## 2 Opis arkuszy egzaminacyjnych ustalonych przez Centralną Komisję Egzaminacyjną na egzamin maturalny z matematyki w roku szkolnym 2009/2010

Zgodnie z koncepcją i strukturą egzaminu maturalnego z matematyki zdający egzamin w tym roku zarówno na poziomie podstawowym, jak i rozszerzonym mieli do rozwiązania zadania z jednego arkusza egzaminacyjnego.

Arkusze zostały tak skonstruowane, aby zbadać stopień opanowania umiejętności określonych w pięciu obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych:

- I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
- II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
- III. Modelowanie matematyczne.
- IV. Użycie i tworzenie strategii.
- V. Rozumowanie i argumentacja.

Poziom trudności poszczególnych zadań był zróżnicowany i dostosowany do możliwości absolwentów szkół ponadgimnazjalnych. Tematyka zadań dotyczyła większości treści zawartych w podstawie programowej matematyki. Zadania egzaminacyjne zawarte w arkuszach pozwalały sprawdzić znajomość i rozumienie podstawowych pojęć, definicji i twierdzeń oraz stosowanie ich do rozwiązywania problemów matematycznych. Sprawdzały też umiejętność korzystania i przetwarzania podanych informacji oraz umiejętność zastosowania tej wiedzy w praktyce z zakresu wymagań egzaminacyjnych dla poziomu podstawowego. Zadania egzaminacyjne w arkuszu rozszerzonym w większym stopniu niż w arkuszu podstawowym sprawdzały umiejętność rozwiązywania problemów i podawania do nich opisu matematycznego w oparciu o treści obejmujące zakres wymagań egzaminacyjnych dla poziomu podstawowego i rozszerzonego, poprawnego interpretowania tekstu matematycznego, umiejętność argumentowania i prowadzenia rozumowania typu matematycznego i oceniania przydatności otrzymanych wyników.



### ARKUSZ PODSTAWOWY

Arkusz podstawowy składał się z 34 zadań, w tym 25 zamkniętych (zdający wybierał odpowiedź spośród czterech propozycji), oraz 9 zadań otwartych (rozwiązanie i odpowiedź zdający musiał samodzielnie zapisać). Za każde poprawnie rozwiązane zadanie zamknięte zdający uzyskiwał 1 punkt, natomiast wśród zadań otwartych było 6 zadań dwupunktowych, 2 zadania czteropunktowe i jedno zadanie pięciopunktowe.

Zadania w arkuszu z poziomu podstawowego sprawdzały umiejętności opisane we wszystkich pięciu obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych. Badały one znajomość i rozumienie podstawowych pojęć matematycznych, definicji i twierdzeń oraz umiejętność posługiwania się tą wiedzą w praktyce. Sprawdzały także umiejętność formułowania opisu matematycznego danej sytuacji, doboru odpowiedniej strategii rozwiązania problemu oraz umiejętność analizowania i interpretowania problemów matematycznych. Tematyka zadań egzaminacyjnych obejmowała treści podstawy programowej. Umiejętności zostały zbadane na treściach wszystkich dziesięciu działów podstawy programowej.

### ARKUSZ ROZSZERZONY

Arkusz dla poziomu rozszerzonego składał się z 11 zadań otwartych o zróżnicowanej punktacji. Wśród nich było 6 zadań czteropunktowych, 4 zadania pięciopunktowe i jedno zadanie sześciopunktowe.

Zadania w arkuszu dla poziomu rozszerzonego sprawdzały umiejętności opisane w trzech najwyższych obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych. Zadania badały przede wszystkim umiejętność analizowania sytuacji problemowych i podawania do nich opisu matematycznego, strategii rozwiązania problemu, a także argumentowania i prowadzenia rozumowania matematycznego. Tematyka zadań obejmowała treści z podstawy programowej dla poziomu rozszerzonego.

### 3 Kartoteki arkuszy egzaminacyjnych z matematyki

W Tabeli 1. zamieszczono kartotekę arkusza podstawowego, w Tabeli 2. – kartotekę arkusza rozszerzonego. Kartoteki te zawierają informację o sprawdzanych czynnościach, przyporządkowany im numer standardu, numer treści ze standardu I, których znajomością powinien wykazać się zdający oraz numery zadań wraz z maksymalną liczbą punktów, które można było uzyskać za ich rozwiązanie.

**Tabela 1. Kartoteka arkusza egzaminacyjnego – poziom podstawowy**

Numer zadania	Badana umiejętność	Standard wymagań egzaminacyjnych	Numer treści ze standardu	Typ zadania	Punktacja
	Zdający:				
1	stosuje interpretację geometryczną wartości bezwzględnej	INF, REP	1) f)	ZZ	1 pkt
2	wykonuje obliczenia procentowe	MOD	1) d)	ZZ	1 pkt
3	stosuje definicję potęgi o wykładniku zero	INF	1) g)	ZZ	1 pkt
4	oblicza sumę logarytmów	REP, STR	1) h)	ZZ	1 pkt
5	dodaje wielomiany	INF	2) c)	ZZ	1 pkt

6	rozwiązuje proste równanie wymierne prowadzące do równania liniowego	INF, REP	3) e)	ZZ	1 pkt
7	sprawdza, czy liczba należy do zbioru rozwiązań nierówności kwadratowej	INF, REP	3) a)	ZZ	1 pkt
8	odczytuje współrzędne wierzchołka paraboli z jej postaci kanonicznej	INF, REP	4) h)	ZZ	1 pkt
9	wykorzystuje interpretację współczynników we wzorze funkcji liniowej	REP	4) g)	ZZ	1 pkt
10	odczytuje własności funkcji z jej wykresu	REP	4) b)	ZZ	1 pkt
11	wyznacza wyraz ciągu arytmetycznego	INF, REP	5) a)	ZZ	1 pkt
12	oblicza iloraz ciągu geometrycznego	INF, REP	5) a)	ZZ	1 pkt
13	oblicza liczbę przekątnych wielokąta	INF, REP	7) c)	ZZ	1 pkt
14	stosuje związki między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego do obliczenia wartości wyrażenia	REP	6) c)	ZZ	1 pkt
15	oblicza długość boku kwadratu wpisanego w okrąg	INF, REP	7) c)	ZZ	1 pkt
16	oblicza wysokość trójkąta równoramiennego, stosując twierdzenie Pitagorasa	INF, REP	7) c)	ZZ	1 pkt
17	wykorzystuje własności figur podobnych do obliczenia długości odcinka	INF, REP	7) b)	ZZ	1 pkt
18	oblicza miarę kąta środkowego	INF	7) a)	ZZ	1 pkt
19	oblicza pole podanej figury	REP	7) c)	ZZ	1 pkt
20	wskazuje współczynnik kierunkowy prostej równoległej do danej prostej	INF, REP	8) c)	ZZ	1 pkt
21	wskazuje równanie okręgu o podanym promieniu	INF, REP	8) g)	ZZ	1 pkt
22	oblicza odległość dwóch punktów na płaszczyźnie	REP	8) e)	ZZ	1 pkt
23	oblicza pole powierzchni wielościanu	INF	9) b)	ZZ	1 pkt
24	oblicza liczbę krawędzi wielościanu	INF	9) b)	ZZ	1 pkt
25	oblicza średnią arytmetyczną	INF	10) a)	ZZ	1 pkt
26	rozwiązuje nierówność kwadratową	REP	3) a)	KO	2 pkt
27	rozwiązuje równanie wielomianowe metodą rozkładu na czynniki	INF, REP	3) d)	KO	2 pkt
28	przeprowadza dowód geometryczny	ROZ	7) b)	KO	2 pkt
29	oblicza wartość funkcji trygonometrycznej kąta ostrego, znając wartość innej funkcji trygonometrycznej tego kąta	REP, STR	6) d)	KO	2 pkt

30	przeprowadza dowód nierówności algebraicznej	ROZ	2) f)	KO	2 pkt
31	oblicza obwód figury, wykorzystując związki miarowe w trójkącie prostokątnym i równobocznym	INF, REP	7) c)	KO	2 pkt
32	oblicza objętość wielościanu	STR	9) b)	RO	4 pkt
33	oblicza prawdopodobieństwo zdarzenia, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa	MOD	10) d)	RO	4 pkt
34	rozwiązuje zadanie, umieszczone w kontekście praktycznym, prowadzące do równania kwadratowego	MOD	3) b)	RO	5 pkt

Tabela 2. Kartoteka arkusza egzaminacyjnego – poziom rozszerzony

Numer zadania	Badana umiejętność Zdający:	Standard wymagań egzaminacyjnych	Numer treści ze standardu	Typ zadania	Punktacja
1	rozwiązuje nierówność z wartością bezwzględną	REP, STR	3) e)R	RO	4 pkt
2	rozwiązuje równanie trygonometryczne	STR	6) e)R	RO	4 pkt
3	rozwiązuje zadanie w kontekście praktycznym prowadzące do badania funkcji kwadratowej	MOD, STR	4) l)	RO	4 pkt
4	stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian	STR	2) b)R	RO	4 pkt
5	wykorzystuje własności ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego do rozwiązania zadania	MOD	5)	RO	5 pkt
6	przeprowadza dyskusję dotyczącą rozwiązań równania kwadratowego z parametrem	STR	3) b)R	RO	5 pkt
7	rozwiązuje zadanie z geometrii analitycznej	STR	8) R	RO	6 pkt
8	przeprowadza dowód algebraiczny	ROZ	4) l)	RO	5 pkt
9	przeprowadza dowód geometryczny	ROZ	7) c)	RO	4 pkt
10	oblicza prawdopodobieństwo z wykorzystaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa	MOD, STR	10) R	RO	4 pkt
11	wyznacza objętość wielościanu z wykorzystaniem trygonometrii	STR	9) b)	RO	5 pkt



## 4 Wyniki egzaminu maturalnego z matematyki

W województwie pomorskim do egzaminu maturalnego z matematyki przystąpiło 20809 (5561-2009r) osób, z czego 3376 (2337-2009r) zdawało ją na poziomie rozszerzonym.

Wynik co najmniej 30% punktów za rozwiązanie zadań na poziomie podstawowym uzyskało 87,4%, a na poziomie rozszerzonym 66,7% przystępujących (174 osoby ogółem – z lat ubiegłych) do egzaminu z matematyki jako przedmiotu obowiązkowego.

W Tabeli 3. przedstawiono procent abiturientów z uwzględnieniem typu szkoły, którzy zdali egzamin maturalny z matematyki na poziomie podstawowym tj. uzyskali co najmniej 30% punktów i zdawali egzamin maturalny po raz pierwszy.

### Zdawalność w sesjach 2005 – 2010.

Tabela 3. Porównanie zdawalności w sesjach 2005 - 2010

		woj. pomorskie					
		LO	LP	T	LU	TU	Razem
% osób, które zdały egzamin	2005	93	56	-	-	-	84
	2006	97	84	88	-	-	93
	2007	88	62	63	-	-	76
	2008	92	63	81	-	-	88
	2009	92	61	74	-	-	89
	2010	93	70	83	47	44	87

Zdawalność w liceach i technikach uzupełniających do 2009 roku miały małą wagę statystyczną ze względu na niewielką liczbę zdających.

Pojęcie *zdawalność* do roku 2006 dotyczyło osób, które uzyskały co najmniej 30% punktów możliwych do zdobycia z arkusza podstawowego, a latach 2007-2009 uzyskały 30% dla wybranego poziomu. Od roku 2010 dotyczy osób, które uzyskały co najmniej 30% punktów możliwych do zdobycia z arkusza podstawowego. Przy analizie tych wyników należy uwzględnić rozdzielenie poziomów.

### 4.1 Rozkłady wyników egzaminu w skali znormalizowanej

Skala ta pozwala porównać wyniki egzaminu z kilku kolejnych lat. Poza tym uczeń może zinterpretować swoje wyniki na tle całej populacji zdających i ocenić swoje realne szanse na kontynuowanie nauki.



**Tabela 4. Znormalizowana skala dziewięciostopniowa staninowa**

<b>Normalizacja wyników egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie podstawowym na skali staninowej (egzamin zdawało 361 679 osób w kraju)</b>				
<b>Stanin (klasa wyniku)</b>		<b>Nazwa stanina</b>	<b>Wynik (w %)</b>	<b>Komentarz</b>
<b>Nr</b>	<b>% ogólnych wyników</b>			
1	4%	najniższy	0% - 16 %	4% zdających ma wynik w tej klasie wyników 96% zdających ma wynik w wyższych klasach.
2	7%	bardzo niski	18% - 26%	7% zdających ma wynik w tej klasie wyników 4% zdających ma wynik w klasie niższej 89% zdających ma wynik w wyższych klasach
3	12%	niski	28% - 38%	12% zdających ma wynik w tej klasie wyników 11% zdających ma wynik w klasach niższych 77% zdających ma wynik w wyższych klasach
4	17%	poniżej średniej	40% - 50%	17% zdających ma wynik w tej klasie wyników 23% zdających ma wynik w klasach niższych 60% zdających ma wynik w wyższych klasach
5	20%	średni	52% - 66%	20% zdających ma wynik w tej klasie wyników 40% zdających ma wynik w klasach niższych 40% zdających ma wynik w wyższych klasach
6	17%	powyżej średniej	68% - 78%	17% zdających ma wynik w tej klasie wyników 60% zdających ma wynik w klasach niższych 23% zdających ma wynik w wyższych klasach
7	12%	wysoki	80% - 88%	12% zdających ma wynik w tej klasie wyników 77% zdających ma wynik w klasach niższych 11% zdających ma wynik w wyższych klasach
8	7%	bardzo wysoki	90% - 94%	7% zdających ma wynik w tej klasie wyników 89% zdających ma wynik w klasach niższych 4% zdających ma wynik w wyższych klasach
9	4%	najwyższy	96% - 100%	4% zdających ma wynik w tej klasie wyników 96% zdających ma wynik w klasach niższych
<b>Normalizacja wyników egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie rozszerzonym na skali staninowej (egzamin zdawało 54 235 osób w kraju)</b>				
<b>Stanin (klasa wyniku)</b>		<b>Nazwa stanina</b>	<b>Wynik (w %)</b>	<b>Komentarz</b>
<b>Nr</b>	<b>% ogólnych wyników</b>			
1	4%	najniższy	0% - 6 %	4% zdających ma wynik w tej klasie wyników 96% zdających ma wynik w wyższych klasach.
2	7%	bardzo niski	8% - 14%	7% zdających ma wynik w tej klasie wyników 4% zdających ma wynik w klasie niższej 89% zdających ma wynik w wyższych klasach
3	12%	niski	16% - 26%	12% zdających ma wynik w tej klasie wyników 11% zdających ma wynik w klasach niższych 77% zdających ma wynik w wyższych klasach
4	17%	poniżej średniej	28% - 42%	17% zdających ma wynik w tej klasie wyników 23% zdających ma wynik w klasach niższych 60% zdających ma wynik w wyższych klasach
5	20%	średni	44% - 56%	20% zdających ma wynik w tej klasie wyników 40% zdających ma wynik w klasach niższych 40% zdających ma wynik w wyższych klasach
6	17%	powyżej średniej	58% - 70%	17% zdających ma wynik w tej klasie wyników 60% zdających ma wynik w klasach niższych 23% zdających ma wynik w wyższych klasach
7	12%	wysoki	72% - 82%	12% zdających ma wynik w tej klasie wyników 77% zdających ma wynik w klasach niższych 11% zdających ma wynik w wyższych klasach
8	7%	bardzo wysoki	84% - 90%	7% zdających ma wynik w tej klasie wyników 89% zdających ma wynik w klasach niższych 4% zdających ma wynik w wyższych klasach
9	4%	najwyższy	92% - 100%	4% zdających ma wynik w tej klasie wyników 96% zdających ma wynik w klasach niższych



## 4.2 Analiza statystyczna wyników arkusza podstawowego

Poniżej przedstawiono wartości wybranych wskaźników wykonania zadań, takie jak wskaźniki łatwości poszczególnych zadań i zestawu zadań z arkusza z poziomu podstawowego oraz łatwości zadań w poszczególnych obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych. Przedstawione dane dotyczą absolwentów z województwa pomorskiego.

### 4.2.1 Wskaźniki statystyczne arkusza podstawowego

Tabela 5. Wartości parametrów statystycznych wyników zdających egzamin maturalny z matematyki jako obowiązkowy na poziomie podstawowym

Parametr statystyczny	Zdający					
	LO	LP	T	LU	TU	Razem
Liczba zdających	12831	686	6341	784	167	20809
Liczba zdających, którzy uzyskali co najmniej 30% punktów i	11989	480	5274	368	74	18185
Wynik minimalny w punktach	0,00	3,00	0,00	0,00	2,00	0,00
Wynik maksymalny w punktach	50,00	45,00	50,00	50,00	39,00	50,00
Wynik średni w punktach	33,11	20,06	24,74	15,02	14,66	29,30
Wynik średni w %	66	40	49	30	29	59
Modalna w punktach	42,00	14,00	21,00	9,00	10,00	28,00
Mediana w punktach	34,00	20,00	24,00	13,00	13,00	30,00
Odchylenie standardowe w punktach	10,95	8,46	9,94	7,96	7,40	11,69
Odchylenie standardowe w %	22	17	20	16	15	23
Zdawalność w %	93,4%	70,0%	83,2%	46,9%	44,3%	87,4%

Analizie statystycznej poddano wyniki 20809 zdających egzamin maturalny z matematyki w maju 2010 roku (dla porównania w 2009r. 3194 osób). Statystyczny maturzysta uzyskał wynik 29,30 punktów, co stanowi 59% liczby punktów możliwych do uzyskania za rozwiązanie zadań arkusza z poziomu podstawowego. Rozstęp wyników wynosi 50 i wskazuje na bardzo duże zróżnicowanie umiejętności zdających. Wartość miary rozrzutu (odchylenie standardowe) - 11,69 - oznacza, że około 70% zdających uzyskało wyniki z przedziału 18-41 punktów.

Powyższe dane wskazują, że uczniowie liceów ogólnokształcących są lepiej przygotowani do egzaminu maturalnego z matematyki niż uczniowie pozostałych typów szkół i wyniki średnie przez nich uzyskane w arkuszu z poziomu podstawowego są wyższe od wyników uzyskanych przez absolwentów pozostałych typów szkół. W arkuszu rozszerzonym różnice te są dużo większe.



#### 4.2.2 Łatwość zadań w obszarach sprawdzanych treści

Tabela 6. Analiza stopnia opanowania sprawdzanych treści poziomu podstawowego

Lp.	Zakres treści	Numery zadań	Liczba punktów	Wskaźnik łatwości	Odchylenie standardowe
1	Liczby rzeczywiste	1,2,3,4	4	0,76	0,26
2	Wyrażenia algebraiczne	5,30	3	0,41	0,24
3	Równania i nierówności	6,7,26,27,34	11	0,58	0,32
4	Funkcje	8,9,10	3	0,71	0,32
5	Ciągi liczbowe	11,12	2	0,82	0,30
6	Trygonometria	14,29	3	0,64	0,40
7	Planimetria	13,15,16,17,18,19,28,31	10	0,51	0,23
8	Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej	20,21,22	3	0,74	0,30
9	Stereometria	23,24,32	6	0,57	0,35
10	Elementy statystyki opisowej; teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka	25,33	5	0,46	0,33

Powyższe wyniki wskazują, że uczniowie zdający egzamin na poziomie podstawowym rozwiązują zadania z poszczególnych działów na poziomie 50 i więcej procent. Niższe wskaźniki łatwości z takich działów jak: „Wyrażenia algebraiczne”, „Elementy statystyki opisowej; teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka” są spowodowane licznymi błędami rachunkowymi. Najłatwiejsze są dla nich zadania z liczb rzeczywistych i trygonometrii. Wynika to z faktu, że zadania tego typu występowały na poprzednich egzaminach maturalnych, włącznie z egzaminem próbnym.

#### 4.2.3 Łatwość zadań w obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych

Tabela 7. Wartości parametrów statystycznych zadań arkusza dla poziomu podstawowego w obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych

Obszar standardów	Średnia	Odchylenie standardowe
1. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	0,74	0,22
2. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	0,68	0,24
3. Modelowanie matematyczne.	0,43	0,34
4. Użycie i tworzenie strategii.	0,54	0,36
5. Rozumowanie i argumentacja.	0,12	0,23



Analiza łatwości zadań w poszczególnych obszarach standardów wykazuje, że najłatwiejsze okazało się rozwiązywanie zadań badających umiejętności opisane w standardzie I, w którym zdający wykorzystuje i przetwarza informacje. W dalszym ciągu najtrudniejszy jest standard V – rozumowanie i argumentacja – występujący w zadaniach na dowodzenie.

Udział punktów możliwych do uzyskania za każdy z tych obszarów przedstawia tabela 8.

**Tabela 8. Przyporządkowanie zadań i punktów do obszarów standardów wymagań egzaminacyjnych.**

Obszar standardów	Numer zadania w arkuszu		Liczba punktów	Waga
	Zadania zamknięte	Zadania otwarte		
1. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	3, 5, 6, 11, 12, 15, 16, 17, 18, 23, 24, 25	27, 31	16	32%
2. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1, 7, 8, 9, 10, 13, 14, 19, 20, 21, 22	26	13	26%
3. Modelowanie matematyczne.	2	33, 34	10	20%
4. Użycie i tworzenie strategii.	4	29, 32	7	14%
5. Rozumowanie i argumentacja.	–	28, 30	4	8%

#### 4.2.4 Łatwość zadań i rozkład ich wyników

Arkusz egzaminacyjny podstawowy był dla zdających umiarkowanie trudny. Bardzo trudne okazały się zadania na dowodzenie 28 i 30.

Stożenie wykonania zadań z arkusza podstawowego przedstawiono w Tabelach 9 i 10.

**Tabela 9. Łatwość zadań arkusza podstawowego**

Numery zadań	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Łatwość zadań	0,65	0,74	0,95	0,70	0,91	0,82	0,89	0,66	0,76	0,70	0,86
Łatwość zadań-kraj	0,66	0,73	0,94	0,70	0,90	0,82	0,90	0,67	0,76	0,70	0,86

Numery zadań	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Łatwość zadań	0,79	0,48	0,73	0,65	0,87	0,53	0,90	0,56	0,74	0,84	0,65
Łatwość zadań-kraj	0,78	0,51	0,73	0,64	0,86	0,52	0,90	0,55	0,75	0,84	0,65

Numery zadań	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
Łatwość zadań	0,83	0,70	0,93	0,59	0,60	0,08	0,59	0,16	0,46	0,48	0,34	0,45

<b>Łatwość zadań kraj</b>	0,82	0,69	0,93	0,60	0,61	0,08	0,57	0,16	0,46	0,47	0,34	0,44
---------------------------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

Rysunek 1 Łatwość zadań arkusza podstawowego

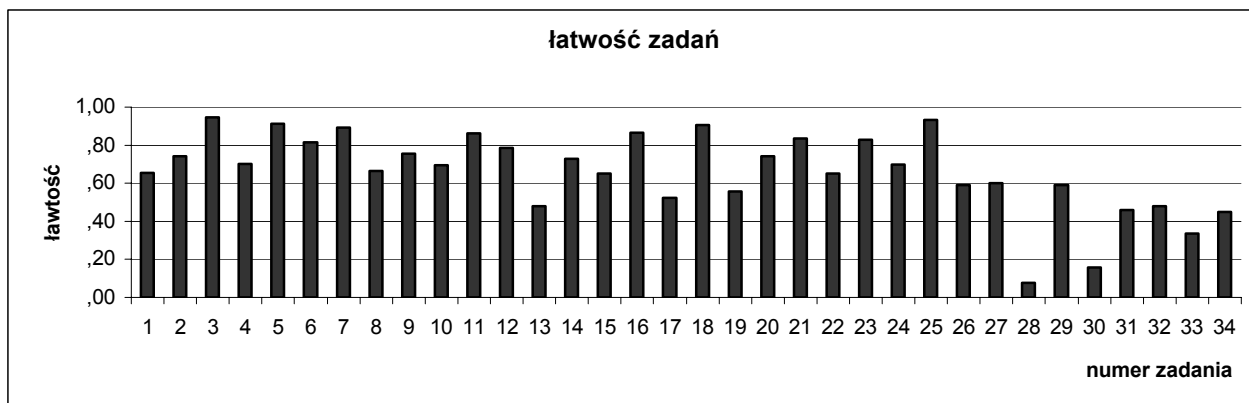


Tabela 10. Interpretacja wskaźnika łatwości zadań arkusza podstawowego

Stopień trudności	Wskaźnik łatwości	Numery zadań	Liczba zadań
Bardzo trudne	0,00-0,19	28, 30	2
Trudne	0,20-0,49	13, 31, 32, 33, 34	5
Umiarkowanie trudne	0,50-0,69	1, 8, 15, 17, 19, 22, 26, 27, 29	9
Łatwe	0,70-0,89	2, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 14, 16, 20, 21, 23, 24,	14
Bardzo łatwe	0,90-1,00	3, 5, 18, 25	4

W arkuszu dla poziomu podstawowego znalazły się zadania od bardzo trudnych po bardzo łatwe, co wskazuje na duże zróżnicowanie zadań. Spośród zadań najłatwiejsze dla zdających były zadania zamknięte: 3, 5, 18, 25.

### 4.3 Analiza statystyczna wyników arkusza rozszerzonego

Poniżej przedstawiono wartości wybranych wskaźników wykonania zadań, takie jak np. wskaźnik łatwości poszczególnych zadań i zestawu zadań z arkusza rozszerzonego oraz łatwości zadań w poszczególnych obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych. Przedstawione dane dotyczą całej grupy abiturientów, którzy wybrali matematykę na poziomie rozszerzonym, zarówno jako przedmiot obowiązkowy (174 osoby), jak i dodatkowy.

#### 4.3.1 Wskaźniki statystyczne arkusza rozszerzonego

W Tabeli 11. przedstawiono wartości wybranych wskaźników statystycznych (wynik maksymalny, minimalny i średni wyrażone w punktach i procentach) uzyskane przez zdających za rozwiązanie zadań z arkusza rozszerzonego.



**Tabela 11. Wartości parametrów statystycznych wyników zdających egzamin maturalny z matematyki jako przedmiot dodatkowo wybrany na poziomie rozszerzonym**

Parametr statystyczny	Zdający					
	LO	LP	T	LU	TU	Razem
Liczba zdających	3048	19	304	3	2	3376
Liczba zdających jako obowiązkowy	163	3	8	0	0	174
Liczba zdających, którzy zdali	112	1	3	0	0	116
Zdawalność w %	69	33	38	0	0	67
Wynik minimalny w punktach	0,00	0,00	0,00	2,00	0,00	0,00
Wynik maksymalny w punktach	50,00	28,00	38,00	5,00	1,00	50,00
Wynik średni w punktach	25,23	5,42	10,57	4,00	0,50	23,77
Wynik średni w %	50	11	21	8	1	48
Mediana	26,00	2,00	8,50	5,00	0,50	24,00
Modalna w punktach	24,00	1,00	2,00	5,00	0,00	24,00
Modalna w %	48	2	4	10	0	48
Odchylenie standardowe w punktach	12,33	8,38	8,61	1,73	0,71	12,82
Odchylenie standardowe w %	25	17	17	3	1	26

Analizie statystycznej poddano wyniki 3376 zdających egzamin maturalny z matematyki w maju 2010 roku (dla porównania, w 2009 roku do egzaminu na poziomie rozszerzonym przystąpiło 3194). Statystyczny maturzysta uzyskał wynik 23,77 punktów, co stanowi 48% liczby punktów możliwych do uzyskania za rozwiązanie zadań arkusza z poziomu rozszerzonego. Rozstęp wyników wynosi 50 punktów i wskazuje na bardzo duże zróżnicowanie umiejętności zdających. Wartość miary rozrzutu (odchylenie standardowe) jest równa 12,8 i oznacza, że około 70% zdających uzyskało wyniki z przedziału 11-37 punktów.

#### 4.3.2 Łatwość zadań w obszarach sprawdzanych treści wymagań egzaminacyjnych

**Tabela 12. Analiza stopnia opanowania sprawdzanych treści poziomu rozszerzonego**

Lp.	Zakres treści	Numery zadań	Liczba punktów	Wskaźnik łatwości	Odchylenie standardowe
1.	Liczby rzeczywiste				
2.	Wyrażenia algebraiczne	4	4	0,68	0,37
3.	Równania i nierówności	1,6	9	0,58	0,37
4.	Funkcje	3,8	9	0,28	0,35
5.	Ciągi liczbowe	5	5	0,77	0,33
6.	Trygonometria	2	4	0,70	0,37
7.	Planimetria	9	4	0,54	0,38
8.	Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej	7	6	0,38	0,37
9.	Stereometria	11	5	0,23	0,28

10.	Elementy statystyki opisowej; teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka	10	4	0,28	0,26
-----	---	----	---	------	------

Powyższe wyniki wskazują, że dla zdających najtrudniejszymi działami matematyki są: „Funkcje” (28%), „Stereometria” (23%) i „Elementy statystyki opisowej; teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka” (28%).

#### 4.3.3 Łatwość zadań w obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych

Tabela 13 Wartości parametrów statystycznych zadań arkusza dla poziomu rozszerzonego w obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych

Obszar standardów	Średnia	Odchylenie standardowe
3. Modelowanie matematyczne.	0,55	0,24
4. Użycie i tworzenie strategii.	0,48	0,28
5. Rozumowanie i argumentacja.	0,38	0,32

Analiza łatwości zadań w poszczególnych obszarach standardów wykazuje, że najtrudniejszym okazało się rozwiązywanie zadań badających umiejętności opisane w standardzie V dla poziomu rozszerzonego (rozumowanie i argumentacja).

Udział punktów możliwych do uzyskania za każdy z tych obszarów przedstawia Tabela 14.

Tabela 14. Przyporządkowanie zadań i punktów do obszarów standardów wymagań egzaminacyjnych.

Obszar standardów	Numer zadania w arkuszu	Liczba punktów	Waga
3. Modelowanie matematyczne.	5, 10	9	18%
4. Użycie i tworzenie strategii.	1, 2, 3, 4, 6, 7, 11	32	64%
5. Rozumowanie i argumentacja.	8, 9	9	18%

#### 4.3.4 Łatwość zadań i rozkład ich wyników

Arkusz egzaminacyjny rozszerzony był dla zdających trudny.

Najtrudniejsze okazały się zadania:

- 8. – przeprowadzenie dowodu algebraicznego,
- 10. – obliczenie objętości wielościanu z wykorzystaniem trygonometrii,
- 11. – obliczanie prawdopodobieństwa z wykorzystaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa.

Najłatwiejsze okazały się zadania:

- 2. – rozwiązanie równania trygonometrycznego,
- 5. – obliczanie wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego.

Stopień wykonania zadań z arkusza rozszerzonego przedstawiono w Tabelach 15. i 16.



Tabela 15. Łatwość zadań arkusza rozszerzonego

Numery zadań	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Łatwość zadań	0,57	0,70	0,32	0,68	0,77	0,58	0,38	0,25	0,54	0,28	0,23
Łatwość zadań - kraj	0,59	0,71	0,34	0,71	0,79	0,61	0,40	0,25	0,57	0,29	0,23

Rysunek 2 Łatwość zadań arkusza rozszerzonego

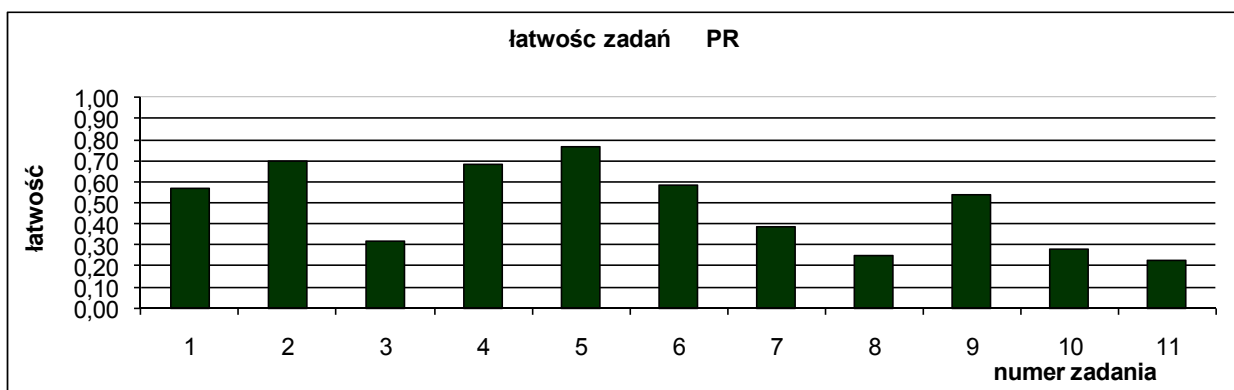


Tabela 16. Interpretacja wskaźnika łatwości zadań arkusza rozszerzonego

Stopień trudności	Wskaźnik łatwości	Numery zadań	Liczba zadań
Bardzo trudne	0,00-0,19	–	-
Trudne	0,20-0,49	3, 7, 8, 10, 11	5
Umiarkowanie trudne	0,50-0,69	1, 4, 6, 9	4
Łatwe	0,70-0,89	2, 5	2
Bardzo łatwe	0,90-1,00	–	-

Spośród zadań umieszczonych w arkuszu dla poziomu rozszerzonego pięć było trudnych i dwa łatwe. W zestawie nie wystąpiły zadania bardzo łatwe i bardzo trudne.

#### 4.4 Analiza jakościowa zadań egzaminacyjnych

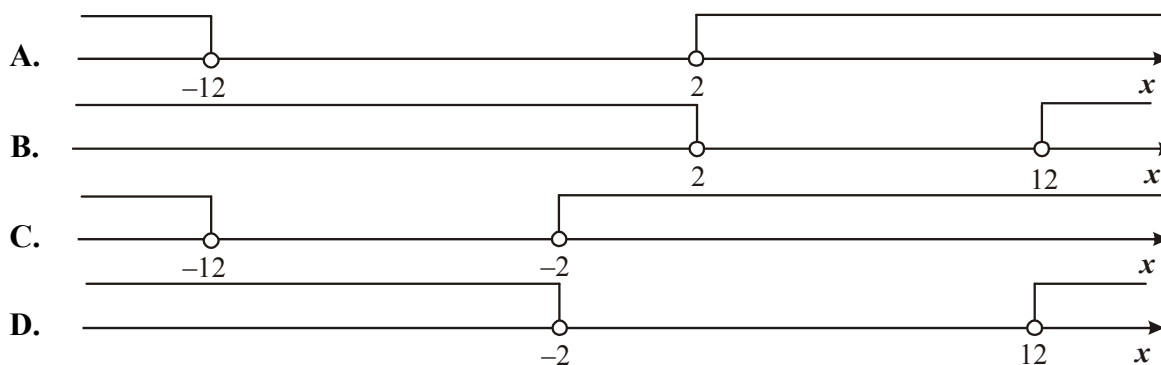
Wskaźniki łatwości zadań w województwie są porównywalne z krajowymi i typowe błędy w rozwiązaniach były analogiczne jak w skali kraju.

Analiza jakościowa poszczególnych zadań wykazuje, że zadania egzaminacyjne dobrze ilustrują standardy wymagań egzaminacyjnych.

### ARKUSZ EGZAMINACYJNY – POZIOM PODSTAWOWY

#### Zadanie 1. (1 pkt)

Wskaż rysunek, na którym jest przedstawiony zbiór rozwiązań nierówności  $|x + 7| > 5$ .



<b>Sprawdzane umiejętności</b> Wykorzystanie interpretacji geometrycznej wartości bezwzględnej do wskazania zbioru rozwiązań nierówności typu $ x - a  > b$ (standard II).	
<b>Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających</b>	0,65
<b>Poprawna odpowiedź:</b> C.	

**Zadanie 2. (1 pkt)**

Spodnie po obniżce ceny o 30% kosztują 126 zł. Ile kosztowały spodnie przed obniżką?

- A. 163,80 zł      B. 180 zł      C. 294 zł      D. 420 zł

<b>Sprawdzane umiejętności</b> Zastosowanie obliczeń procentowych w sytuacji praktycznej (standard III).	
<b>Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających</b>	0,74
<b>Poprawna odpowiedź:</b> B.	

**Zadanie 3. (1 pkt)**

Liczba  $\left(\frac{2^{-2} \cdot 3^{-1}}{2^{-1} \cdot 3^{-2}}\right)^0$  jest równa

- A. 1      B. 4      C. 9      D. 36

<b>Sprawdzane umiejętności</b> Zastosowanie definicji potęgi o wykładniku zero (standard I).	
<b>Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających</b>	0,95
<b>Poprawna odpowiedź:</b> A.	

**Zadanie 4. (1 pkt)**

Liczba  $\log_4 8 + \log_4 2$  jest równa

- A. 1      B. 2      C.  $\log_4 6$       D.  $\log_4 10$

<b>Sprawdzane umiejętności</b> Obliczenie sumy logarytmów (standard IV).	
<b>Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających</b>	0,70
<b>Poprawna odpowiedź:</b> B.	

**Zadanie 5. (1 pkt)**

Dane są wielomiany  $W(x) = -2x^3 + 5x^2 - 3$  oraz  $P(x) = 2x^3 + 12x$ . Wielomian  $W(x) + P(x)$  jest równy

A. $5x^2 + 12x - 3$	C. $4x^6 + 5x^2 + 12x - 3$
B. $4x^3 + 5x^2 + 12x - 3$	D. $4x^3 + 12x^2 - 3$

**Sprawdzane umiejętności**

Dodawanie wielomianów (standard I).

**Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających**

0,91

**Poprawna odpowiedź:** A.

**Zadanie 6. (1 pkt)**

Rozwiązaniem równania  $\frac{3x-1}{7x+1} = \frac{2}{5}$  jest

A. 1

B.  $\frac{7}{3}$

C.  $\frac{4}{7}$

D. 7

**Sprawdzane umiejętności**

Sprawdzenie, czy liczba jest rozwiązaniem równania (standard I).

**Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających**

0,82

**Poprawna odpowiedź:** D.

**Zadanie 7. (1 pkt)**

Do zbioru rozwiązań nierówności  $(x-2)(x+3) < 0$  należy liczba

A. 9

B. 7

C. 4

D. 1

**Sprawdzane umiejętności**

Sprawdzenie, czy liczba należy do zbioru rozwiązań nierówności kwadratowej (standard I).

**Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających**

0,89

**Poprawna odpowiedź:** D.

**Zadanie 8. (1 pkt)**

Wykresem funkcji kwadratowej  $f(x) = -3x^2 + 3$  jest parabola o wierzchołku w punkcie

A. (3,0)

B. (0,3)

C. (-3,0)

D. (0,-3)

**Sprawdzane umiejętności**

Odczytanie z postaci kanonicznej funkcji kwadratowej współrzędnych wierzchołka paraboli (standard II).

**Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających**

0,66

**Poprawna odpowiedź:** B.

**Zadanie 9. (1 pkt)**

Prosta o równaniu  $y = -2x + (3m+3)$  przecina w układzie współrzędnych oś  $Oy$  w punkcie (0,2). Wtedy



A.  $m = -\frac{2}{3}$

B.  $m = -\frac{1}{3}$

C.  $m = \frac{1}{3}$

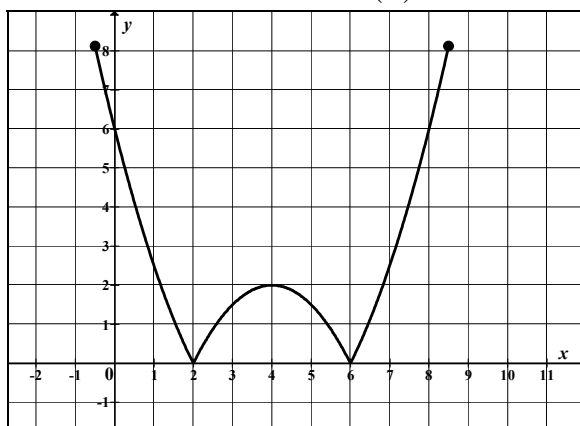
D.  $m = \frac{5}{3}$

**Sprawdzane umiejętności**

Wykorzystanie interpretacji współczynników we wzorze funkcji liniowej (standard II).

**Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających**

0,76

**Poprawna odpowiedź:** B.**Zadanie 10. (1 pkt)**Na rysunku jest przedstawiony wykres funkcji  $y = f(x)$ .

Które równanie ma dokładnie trzy rozwiązania?

A.  $f(x) = 0$

B.  $f(x) = 1$

C.  $f(x) = 2$

D.  $f(x) = 3$

**Sprawdzane umiejętności**

Odczytywanie własności funkcji z jej wykresu (standard II).

**Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających**

0,70

**Poprawna odpowiedź:** C.**Zadanie 11. (1 pkt)**W ciągu arytmetycznym  $(a_n)$  dane są:  $a_3 = 13$  i  $a_5 = 39$ . Wtedy wyraz  $a_1$  jest równy

A. 13

B. 0

C. -13

D. -26

**Sprawdzane umiejętności**

Wyznaczanie wyrazów ciągu arytmetycznego (standard I).

**Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających**

0,86

**Poprawna odpowiedź:** C.**Zadanie 12. (1 pkt)**W ciągu geometrycznym  $(a_n)$  dane są:  $a_1 = 3$  i  $a_4 = 24$ . Iloraz tego ciągu jest równy

A. 8

B. 2

C.  $\frac{1}{8}$

D.  $-\frac{1}{2}$

**Sprawdzane umiejętności**

Obliczanie ilorazu ciągu geometrycznego (standard I).

**Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających**

0,79

**Poprawna odpowiedź:** B.

**Zadanie 13. (1 pkt)**

Liczba przekątnych siedmiokąta foremnego jest równa

- A. 7                      B. 14                      C. 21                      D. 28

<b>Sprawdzane umiejętności</b>	
Obliczenie liczby przekątnych wielokąta (standard II).	
<b>Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających</b>	0,48
<b>Poprawna odpowiedź:</b> B.	

**Zadanie 14. (1 pkt)**Kąt  $\alpha$  jest ostry i  $\sin \alpha = \frac{3}{4}$ . Wartość wyrażenia  $2 - \cos^2 \alpha$  jest równa

- A.  $\frac{25}{16}$                       B.  $\frac{3}{2}$                       C.  $\frac{17}{16}$                       D.  $\frac{31}{16}$

<b>Sprawdzane umiejętności</b>	
Zastosowanie związków między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego do obliczenia wartości wyrażenia (standard II).	
<b>Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających</b>	0,73
<b>Poprawna odpowiedź:</b> A.	

**Zadanie 15. (1 pkt)**

Okrąg opisany na kwadracie ma promień 4. Długość boku tego kwadratu jest równa

- A.  $4\sqrt{2}$                       B.  $2\sqrt{2}$                       C. 8                      D. 4

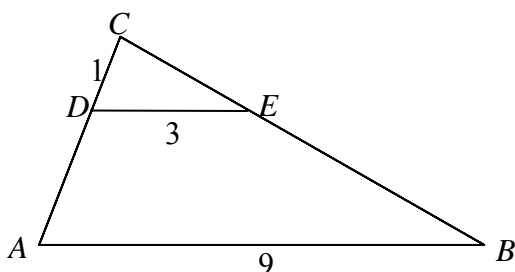
<b>Sprawdzane umiejętności</b>	
Obliczenie długość boku kwadratu wpisanego w okrąg (standard I).	
<b>Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających</b>	0,65
<b>Poprawna odpowiedź:</b> A.	

**Zadanie 16. (1 pkt)**

Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 6, a ramię ma długość 5. Wysokość opuszczona na podstawę ma długość

- A. 3                      B. 4                      C.  $\sqrt{34}$                       D.  $\sqrt{61}$

<b>Sprawdzane umiejętności</b>	
Zastosowanie twierdzenie Pitagorasa do obliczenia wysokość trójkąta równoramiennego (standard I).	
<b>Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających</b>	0,87
<b>Poprawna odpowiedź:</b> B.	

**Zadanie 17. (1 pkt)**Odcinki  $AB$  i  $DE$  są równoległe. Długości odcinków  $CD$ ,  $DE$  i  $AB$  są odpowiednio równe 1, 3 i 9. Długość odcinka  $AD$  jest równa

A. 2

B. 3

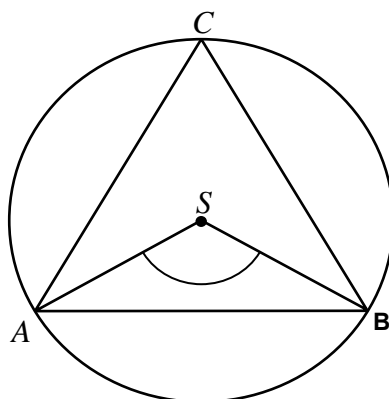
C. 5

D. 6

<b>Sprawdzane umiejętności</b>	
Wykorzystanie własności figur podobnych do obliczenia długości odcinka (standard I).	
<b>Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających</b>	0,53
<b>Poprawna odpowiedź:</b> A.	

**Zadanie 18. (1 pkt)**

Punkty  $A, B, C$  leżące na okręgu o środku  $S$  są wierzchołkami trójkąta równobocznego. Miara zaznaczonego na rysunku kąta środkowego  $ASB$  jest równa



A.  $120^\circ$

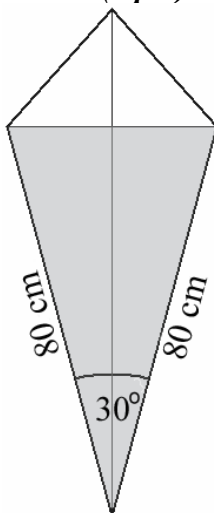
B.  $90^\circ$

C.  $60^\circ$

D.  $30^\circ$

<b>Sprawdzane umiejętności</b>	
Obliczenie miary kąta środkowego (standard I).	
<b>Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających</b>	0,90
<b>Poprawna odpowiedź:</b> A.	

**Zadanie 19. (1 pkt)**



Latawiec ma wymiary podane na rysunku. Powierzchnia zacieniowanego trójkąta jest równa

A.  $3200 \text{ cm}^2$

B.  $6400 \text{ cm}^2$

C.  $1600 \text{ cm}^2$

D.  $800 \text{ cm}^2$



<b>Sprawdzone umiejętności</b> Obliczenie pola trójkąta (standard II).	
<b>Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających</b>	0,56
<b>Poprawna odpowiedź:</b> C.	

**Zadanie 20. (1 pkt)**

Współczynnik kierunkowy prostej równoległej do prostej o równaniu  $y = -3x + 5$  jest równy:

- A.  $-\frac{1}{3}$     B.  $-3$     C.  $\frac{1}{3}$     D.  $3$

<b>Sprawdzone umiejętności</b> Wskazanie współczynnika kierunkowego prostej równoległej do danej prostej (standard II).	
<b>Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających</b>	0,74
<b>Poprawna odpowiedź:</b> B.	

**Zadanie 21. (1 pkt)**

Wskaż równanie okręgu o promieniu 6.

- A.  $x^2 + y^2 = 3$     B.  $x^2 + y^2 = 6$     C.  $x^2 + y^2 = 12$     D.  $x^2 + y^2 = 36$

<b>Sprawdzone umiejętności</b> Wskazanie równanie okręgu o podanym promieniu (standard II).	
<b>Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających</b>	0,84
<b>Poprawna odpowiedź:</b> D.	

**Zadanie 22. (1 pkt)**

Punkty  $A = (-5, 2)$  i  $B = (3, -2)$  są wierzchołkami trójkąta równobocznego  $ABC$ . Obwód tego trójkąta jest równy

- A. 30    B.  $4\sqrt{5}$     C.  $12\sqrt{5}$     D. 36

<b>Sprawdzone umiejętności</b> Obliczenie odległości dwóch punktów na płaszczyźnie (standard II).	
<b>Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających</b>	0,65
<b>Poprawna odpowiedź:</b> C.	

**Zadanie 23. (1 pkt)**

Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu o wymiarach  $5 \times 3 \times 4$  jest równe

- A. 94    B. 60    C. 47    D. 20

<b>Sprawdzone umiejętności</b> Obliczenie pola powierzchni prostopadłościanu (standard I).	
<b>Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających</b>	0,83
<b>Poprawna odpowiedź:</b> A.	

**Zadanie 24. (1 pkt)**

Ostrosłup ma 18 wierzchołków. Liczba wszystkich krawędzi tego ostrosłupa jest równa

- A. 11    B. 18    C. 27    D. 34

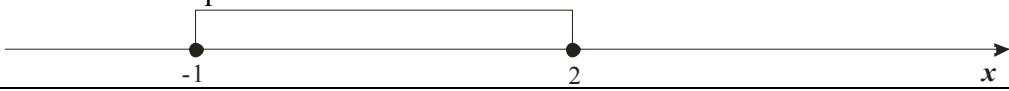
<b>Sprawdzane umiejętności</b> Obliczenie liczby krawędzi ostrosłupa (standard I).	
<b>Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających</b>	0,70
<b>Poprawna odpowiedź:</b> D.	

**Zadanie 25. (1 pkt)**Średnia arytmetyczna dziesięciu liczb  $x, 3, 1, 4, 1, 5, 1, 4, 1, 5$  jest równa 3. Wtedy

- A.  $x = 2$                       B.  $x = 3$                       C.  $x = 4$                       D.  $x = 5$

<b>Sprawdzane umiejętności</b> Obliczenie średniej arytmetycznej (standard I).	
<b>Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających</b>	0,93
<b>Poprawna odpowiedź:</b> D.	

**Zadanie 26. (2 pkt)**Rozwiąż nierówność  $x^2 - x - 2 \leq 0$ .

<b>Sprawdzane umiejętności</b> Rozwiązywanie nierówności kwadratowej (standard II).	
<b>Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających</b>	0,59
<b>Przydział punktów za zadanie</b>	
<b>Zdający otrzymuje ..... 1 pkt</b>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• gdy wyznaczy pierwiastki trójmianu kwadratowego lub zapisze trójmian w postaci iloczynowej i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy</li> </ul> albo	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• gdy doprowadzi nierówność do postaci <math>\left x - \frac{1}{2}\right  \leq \frac{3}{2}</math> i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.</li> </ul>	
<b>Zdający otrzymuje ..... 2 pkt</b>	
gdy:	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci: <math>-1 \leq x \leq 2</math> lub <math>\langle -1, 2 \rangle</math> lub <math>x \in \langle -1, 2 \rangle</math></li> </ul> albo	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów:</li> </ul>	
	
<b>Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:</b>	
Obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego	
$x_1 = \frac{1-3}{2} = -1 \quad x_2 = \frac{1+3}{2} = 2.$	
Rysujemy fragment wykresu funkcji kwadratowej z zaznaczonymi miejscami zerowymi i odczytujemy rozwiązanie nierówności: $x \in \langle -1, 2 \rangle$ .	
<b>Komentarz:</b>	
Zadanie okazało się dla ogółu zdających umiarkowanie trudne.	
Badało elementarną dla ucznia szkoły ponadgimnazjalnej umiejętność: rozwiązywanie	



nierówności kwadratowej. Mimo iż ten typ zadania pojawił się na próbnej maturze (a także w arkuszach wcześniej publikowanych na stronie internetowej CKE i OKE), to zdający nadal popełniali błędy:

- obliczając wyróżnik trójmianu kwadratowego, np.  $\Delta = -1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 7$ ,

- podając jego pierwiastki, np.  $x_1 = \frac{-1-3}{2} = -2$ ,  $x_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$ ,

lub

- zapisując zbiór rozwiązań nierówności kwadratowej, np.  $x \in (-\infty, -1) \cup \langle 2, +\infty$  albo  $x \in (-1, 2)$ , albo podawali pierwiastki jako zbiór rozwiązań nierówności kwadratowej.

Pojawiały się również rozwiązania świadczące o braku podstawowych wiadomości i umiejętności nie tylko z zakresu funkcji kwadratowej, np.

$$x^2 - x - 2 \leq 0$$

$$x^2 - x \leq 2$$

$$x \leq 2.$$

### Zadanie 27. (2 pkt)

Rozwiąż równanie  $x^3 - 7x^2 - 4x + 28 = 0$ .

#### Sprawdzane umiejętności

Rozwiązywanie równania wielomianowego metodą rozkładu na czynniki (standard I).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających

0,60

Przydział punktów za zadanie

Zdający otrzymuje ..... 1 pkt

gdy:

- pogrupuje wyrazy do postaci, z której łatwo można przejść do postaci iloczynowej, np.:  $x(x^2 - 4) - 7(x^2 - 4) = 0$  lub  $x^2(x - 7) - 4(x - 7) = 0$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd

albo

- podzieli wielomian  $x^3 - 7x^2 - 4x + 28$  przez dwumian  $(x - 2)$  (albo  $(x + 2)$  albo  $(x - 7)$ ) i otrzyma poprawny iloraz i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd

albo

- podzieli wielomian  $x^3 - 7x^2 - 4x + 28$  przez trójmian np.  $(x - 2)(x - 7)$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd.

Zdający otrzymuje ..... 2 pkt

gdy wyznaczy bezbłędnie wszystkie rozwiązania równania:  $x = 7$  lub  $x = -2$  lub  $x = 2$ .

#### Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:

Przedstawiamy lewą stronę równania w postaci iloczynowej, stosując metodę grupowania

$$\text{wyrazów: } x^2(x - 7) - 4(x - 7) = (x^2 - 4)(x - 7),$$

a następnie rozwiązujemy równanie:

$$(x - 7)(x^2 - 4) = 0$$

$$(x - 2)(x + 2)(x - 7) = 0$$

Stąd  $x = 7$  lub  $x = -2$  lub  $x = 2$ .

**Komentarz:**

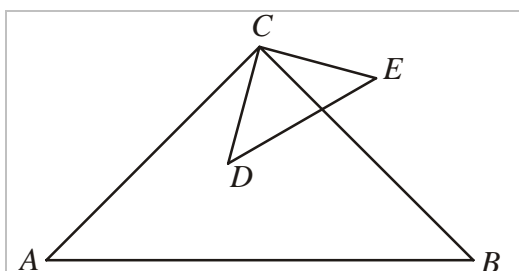
Zadanie okazało się dla ogółu zdających umiarkowanie trudne i jednocześnie było dla nich najłatwiejszym zadaniem otwartym w tym arkuszu.

Rozwiązywanie równania wielomianowego było kolejną z umiejętności badanych na egzaminie maturalnym także w poprzednich latach. Najczęściej popełniane błędy w tym zadaniu były wynikiem:

- niepoprawnego grupowania wyrazów, np.  $x^2(x-7) - 4(x+7) = 0$
- niepoprawnego grupowania wyrazów, np.  $x^2(x-7) - 4(x+7) = 0$  (pomijanie znaku działania),
- niewłaściwego rozkładu na czynniki, np.  $x(x^2 - 7x - 4 + 28) = 0$ ,
- niewłaściwego grupowania  $x(x^2 - 7x - 4) = -28$  i rozwiązywania równania  $x^2 - 7x - 4 = 0$ , obliczania  $\Delta$  i pierwiastków równania,
- niepoprawnego rozwiązywania równania kwadratowego, np.  $x^2 - 4 = 0: x = 2$ .

### Zadanie 28. (2 pkt)

Trójkąty prostokątne równoramienne ABC i CDE są położone tak, jak na poniższym rysunku (w obu trójkątach kąt przy wierzchołku C jest prosty). Wykaż, że  $|AD| = |BE|$ .



#### Sprawdzane umiejętności

Przeprowadzenie dowodu geometrycznego (standard V).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających

0,08

Przydział punktów za zadanie

Zdający otrzymuje ..... 1 pkt

gdy

- napisze, że trójkąty  $ACD$  i  $BCE$  są przystające i wyprowadzi stąd wniosek, że  $|AD| = |BE|$

albo

- zapisze, że  $|AC| = |BC|$ ,  $|CD| = |CE|$  i  $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCE$

Zdający otrzymuje ..... 2 pkt

gdy uzasadni, że trójkąty  $ACD$  i  $BCE$  są przystające i wyprowadzi stąd wniosek, że  $|AD| = |BE|$ .

**Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:**

Dorysowujemy odcinki  $AD$  i  $BE$ .

Trójkąty  $ACD$  i  $BCE$  są przystające na podstawie cechy  $bkb$ :

- $|AC| = |BC|$ , bo trójkąt  $ABC$  jest równoramienny
- $|CD| = |CE|$ , bo trójkąt  $CDE$  jest równoramienny



- $|\sphericalangle ACD| = 90^\circ - |\sphericalangle DCB| = |\sphericalangle BCE|$ .

Zatem  $|AD| = |BE|$ .

**Komentarz:**

Zadanie okazało się dla ogółu zdających bardzo trudne i jednocześnie było dla nich najtrudniejszym zadaniem w tym arkuszu.

Ponad 28% maturzystów nie podjęło próby rozwiązania tego zadania, chociaż problem, z którym mieli się uporać, był typowy. Rozwiązywanie zadań z geometrii płaskiej jest dla maturzystów w dalszym ciągu trudne. Często zdający błędnie zakładali współliniowość punktów  $A, D, E$  lub korzystali z tezy zadania, zakładając przystawanie trójkątów  $ACD$  i  $BCE$  na podstawie cechy  $bbb$ . W wielu pracach zdający uzasadniali równość odcinków  $AD$  i  $BE$ , odwołując się do podobieństwa (bez podania uzasadnienia), a nie przystawania trójkątów, albo powoływali się na cechę przystawania  $bkb$ , bez uzasadnienia równości kątów  $ACD$  i  $BCE$ . Pojawiło się dużo rozwiązań błędnych, w których zdający próbowali wykorzystać równość wektorów i działania na wektorach.

**Zadanie 29. (2 pkt)**

Kąt  $\alpha$  jest ostry i  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$ . Oblicz  $\cos \alpha$ .

**Sprawdzane umiejętności**

Obliczenie wartości jednej funkcji trygonometrycznej kąta ostrego z wykorzystaniem wartości innej funkcji trygonometrycznej tego kąta (standard IV).

**Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających**

0,59

**Przydział punktów za zadanie**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**

gdy:

- przekształci dane wyrażenie do postaci wyrażenia zawierającego tylko  $\cos \alpha$  lub tylko  $\sin \alpha$  i wykorzysta „jedynekę trygonometryczną”, np.

$$\sin \alpha = \frac{5}{12} \cos \alpha, \quad \frac{25}{144} \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd}$$

albo

- obliczy długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 12 i 5 (lub ich wielokrotności) z błędem rachunkowym i zapisze  $\cos \alpha$

albo

- narysuje trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 12 i 5 (lub ich wielokrotności), obliczy długość przeciwprostokątnej i zaznaczy w tym trójkącie poprawnie kąt  $\alpha$

albo

- odczyta z tablic przybliżoną wartość kąta  $\alpha$ :  $\alpha \approx 22^\circ$  (akceptujemy wynik  $\alpha \approx 23^\circ$ ) i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**

gdy:

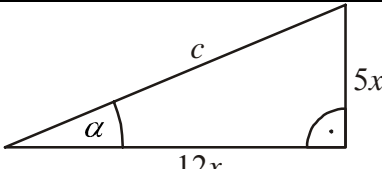
- obliczy wartość  $\cos \alpha$ :  $\cos \alpha = \frac{12}{13}$

albo

- obliczy przybliżoną wartość  $\cos \alpha$ :  $\cos 22^\circ \approx 0,9272$  lub  $\cos 23^\circ \approx 0,9205$

**Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:**



	$c^2 = (12x)^2 + (5x)^2$ $c = 13x$ $\cos \alpha = \frac{12x}{13x} = \frac{12}{13}$
---	--

**Komentarz:**

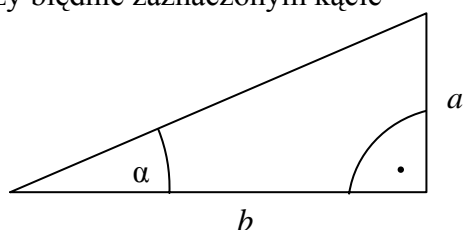
Zadanie okazało się dla ogółu zdających umiarkowanie trudne, choć podobne wystąpiło na próbnym egzaminie maturalnym w listopadzie 2009r.

Znajomość definicji funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym jest elementarną umiejętnością z zakresu trygonometrii. Mimo to wciąż wielu zdających ma problemy z prawidłowym stosowaniem definicji i twierdzeń dotyczących funkcji trygonometrycznych. Stąd na przykład rozwiązania:

- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{5}{12} \Rightarrow \sin \alpha = 5$  i  $\cos \alpha = 12$

albo

- przy błędnie zaznaczonym kącie



$$a = 12$$

$$b = 5$$

$$c = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{c} = \frac{12}{13}$$

Zdający, którzy do rozwiązania zadania używali jedynie trygonometrii, popełniali bardzo dużo błędów przy przekształcaniu równań. Nie wykazali się umiejętnością rozwiązania układu

$$\begin{cases} \sin \alpha = \frac{5}{12} \\ \cos \alpha = \frac{12}{13} \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases}$$

Błędnie wyznaczyli  $\sin \alpha$  lub  $\cos \alpha$ .

W tym zadaniu zdający najczęściej zaskakiwali brakiem sprawności w wykonywaniu podstawowych działań arytmetycznych, błędami popełnianymi w trakcie przekształceń algebraicznych i niepoprawnym stosowaniem twierdzenia Pitagorasa.

**Zadanie 30. (2 pkt)**

Wykaż, że jeśli  $a > 0$ , to  $\frac{a^2 + 1}{a + 1} \geq \frac{a + 1}{2}$ .

**Sprawdzane umiejętności**

Przeprowadzenie dowodu nierówności algebraicznej (standard V).

**Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających**

0,16

**Przydział punktów za zadanie****Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**

gdy:

- otrzyma nierówność równoważną  $a^2 - 2a + 1 \geq 0$  lub  $\frac{a^2 - 2a + 1}{2(a+1)} \geq 0$  i na tym poprzestanie lub w dalszej części dowodu popełni błąd

albo

- stosując metodę dowodu nie wprost otrzyma nierówność  $(a-1)^2 < 0$  i nie zapisze żadnych wniosków lub zapisze błędne wnioski

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**

gdy

- zapisze nierówność  $a^2 - 2a + 1 \geq 0$  i uzasadni, że wszystkie liczby dodatnie  $a$  spełniają tę nierówność

albo

- zapisze nierówność  $\frac{a^2 - 2a + 1}{2(a+1)} \geq 0$  i uzasadni, że wszystkie liczby dodatnie  $a$  spełniają tę nierówność

albo

- stosując metodę dowodu nie wprost otrzyma nierówność  $(a-1)^2 < 0$  i zapisze, że otrzymana nierówność nie zachodzi dla żadnej liczby rzeczywistej  $a$ .

**Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:**

Przekształcamy nierówność w sposób równoważny:

$$\frac{a^2 + 1}{a + 1} \geq \frac{a + 1}{2}$$

$$2(a^2 + 1) \geq (a + 1)^2$$

$$2a^2 + 2 \geq a^2 + 2a + 1$$

$$a^2 - 2a + 1 \geq 0$$

$$(a - 1)^2 \geq 0 \text{ co kończy dowód.}$$

**Komentarz:**

Zadanie okazało się dla ogółu zdających bardzo trudne.

Zadania typu „wykaż” z reguły budzą obawy zdających, tak było również w tym przypadku. Ponad 16% maturzystów nie podjęło próby rozwiązania tego zadania.

Najczęściej popełnianym przez zdających błędem było dowodzenie prawdziwości twierdzenia dla kilku wybranych liczb całkowitych i wnioskowanie na tej podstawie o jego prawdziwości dla wszystkich liczb dodatnich. Pojawiały się też błędy związane z niepoprawnymi

przekształceniami algebraicznymi, np.  $\frac{2a^2 + 1 - a^2 - a - a + 1}{2(a+1)} \geq 0$ , a także błędy wynikające

z niezrozumienia, kiedy trójmian kwadratowy jest nieujemny, np.

$$a^2 - 2a + 1 \geq 0$$

$$\Delta = 4 - 4 = 0$$

$$a = \frac{2}{2} = 1 > 0.$$

**Zadanie 31. (2 pkt)**

W trapezie prostokątnym krótsza przekątna dzieli go na trójkąt prostokątny i trójkąt równoboczny. Dłuższa podstawa trapezu jest równa 6. Oblicz obwód tego trapezu.

**Sprawdzane umiejętności**

Obliczenie obwodu trapezu z wykorzystaniem związków miarowych w trójkącie prostokątnym i równobocznym (standard I).

**Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających**

0,46

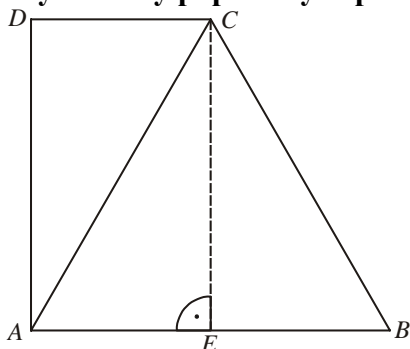
**Przydział punktów za zadanie****Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**

gdy

- prawidłowo podzielił trapez na trójkąty i poprawnie obliczył długość krótszej podstawy trapezu ( $|DC| = 3$ ) i na tym zakończył lub popełnił błędy rachunkowe przy obliczaniu obwodu trapezu

albo

- prawidłowo podzielił trapez na trójkąty i poprawnie obliczył wysokość trapezu ( $h = 3\sqrt{3}$ ) i na tym zakończył lub popełnił błędy rachunkowe przy obliczaniu obwodu trapezu

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**gdy obliczył poprawnie obwód trapezu:  $15 + 3\sqrt{3}$ .**Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:**

Prowadzimy wysokość  $CE$  trójkąta równobocznego  $ABC$ . Wówczas

$$|AE| = 3 \text{ i stąd } |CD| = |AE| = 3.$$

$$\text{Następnie } |BC| = |AB| = 6$$

$$\text{oraz } |DA| = |CE| = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}.$$

Stąd obwód trapezu jest równy

$$6 + 6 + 3 + 3\sqrt{3} = 15 + 3\sqrt{3}.$$

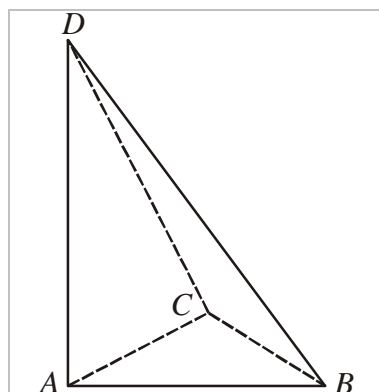
**Komentarz:**

Zadanie okazało się dla ogółu zdających trudne.

Problemy w tym zadaniu pojawiały się już na etapie podziału trapezu. Niektórzy zdający przyjmowali, że otrzymane trójkąty to: trójkąt prostokątny równoramienny i trójkąt równoboczny lub dwa trójkąty prostokątne. Często pojawiały się także błędy rachunkowe przy obliczaniu wysokości trapezu, np.  $h^2 = 36 - 9 = 25$  lub jego obwodu, np.  $6 + 6 + 3 + 3\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$ .

**Zadanie 32. (4 pkt)**

Podstawą ostrosłupa  $ABCD$  jest trójkąt  $ABC$ . Krawędź  $AD$  jest wysokością ostrosłupa (zobacz rysunek). Oblicz objętość ostrosłupa  $ABCD$ , jeśli wiadomo, że  $|AD| = 12$ ,  $|BC| = 6$ ,  $|BD| = |CD| = 13$ .



<b>Sprawdzane umiejętności</b>	
Obliczenie objętości ostrosłupa (standard IV).	
<b>Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających</b>	0,48
<b>Kategoria rozwiązania</b>	
<b>Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 pkt</b>	
Obliczenie długości krawędzi $AB$ lub $AC$ podstawy ostrosłupa: $ AB  = 5$ , $ AC  = 5$ .	
<b>Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt</b>	
Obliczenie wysokości $AE$ trójkąta $ABC$ : $ AE  = 4$ .	
<b>Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt</b>	
Obliczenie pola podstawy ostrosłupa: $P_{ABC} = 12$ .	
<b>Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt</b>	
Obliczenie objętości ostrosłupa: $V = 48$ .	
<b>Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:</b>	
Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta $ABD$ wynika, że $ AB ^2 =  BD ^2 -  AD ^2 = 25$ , stąd $ AB  = 5$ . Podobnie z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta $ACD$ wynika, że $ AC  = 5$ .	
W trójkącie $ABC$ prowadzimy wysokość $AE$ . Trójkąt $ABC$ jest równoramienny ( $ AB  =  AC $ ), więc $ BE  =  EC  = 3$ . Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta $ABE$ mamy $ AE ^2 =  AB ^2 -  BE ^2 = 16$ , stąd $ AE  = 4$ .	
Zatem $P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$ .	
Objętość ostrosłupa jest równa $V = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 12 = 48$ .	
<b>Komentarz:</b>	
Zadanie okazało się dla ogółu zdających trudne.	
Rozwiązywanie zadania ze stereometrii wymaga zawsze bardzo uważnej analizy jego treści.	
W tym zadaniu wymagano od zdających dostrzeżenia odpowiednich trójkątów prostokątnych i umiejętności zastosowania do nich twierdzenia Pitagorasa. Błędy w rozwiązaniu tego zadania najczęściej wynikały z niewłaściwej interpretacji podstawy ostrosłupa, np. zdający zakładali, że trójkąt $ABC$ jest równoboczny albo jest trójkątem równoramiennym o długości ramienia 6,	

poza tym pojawiło się dużo błędów związanych z pominięciem współczynnika  $\frac{1}{2}$  we wzorze na pole trójkąta, bądź pominięcie współczynnika  $\frac{1}{3}$  we wzorze na objętość ostrosłupa.

**Zadanie 33. (4 pkt)**

Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  polegającego na tym, że w pierwszym rzucie otrzymamy parzystą liczbę oczek i iloczyn liczb oczek w obu rzutach będzie podzielny przez 12. Wynik przedstaw w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

**Sprawdzane umiejętności**

Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia z zastosowaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa (standard III).

**Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających**

0,34

**Kategoria rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania ..... 1 pkt**

Zdający zapisze, że  $|\Omega| = 36$  i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Zdający zapisze, że  $|\Omega| = 36$  oraz, że  $A = \{(2,6), (4,3), (4,6), (6,2), (6,4), (6,6)\}$  i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Zdający zapisze, że  $|\Omega| = 36$  oraz, że  $|A| = 6$  i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia  $A$ :  $P(A) = \frac{1}{6}$

**Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:**

$\Omega$  jest zbiorem wszystkich par  $(a,b)$  takich, że  $a,b \in \{1,2,3,4,5,6\}$ . Mamy model klasyczny.

$|\Omega| = 36$ .

Zdarzeniu  $A$  sprzyjają następujące zdarzenia elementarne:

$(2,6), (4,3), (4,6), (6,2), (6,4), (6,6)$

Zatem  $|A| = 6$  i stąd  $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ .

**Komentarz:**

Zadanie okazało się dla ogółu zdających trudne.

Było to bardzo typowe zadanie, w którym zdający miał wykazać się umiejętnością obliczenia prawdopodobieństwa w prostej sytuacji probabilistycznej. Dobranie właściwego modelu, zliczenie odpowiednich wyników i zastosowanie twierdzenia „Klasyczna definicja prawdopodobieństwa” to najczęściej stosowany sposób rozwiązania drugiej części zadania. Rozwiązanie nie wymagało stosowania wzorów kombinatorycznych. Większość zdających nie potrafiła jednak poprawnie zbudować modelu rozwiązania. Zdający w większości przypadków nie mieli problemu z obliczeniem mocy  $\Omega$ . Częstym błędem zdających było stosowanie



różnych modeli, innego do obliczania mocy  $\Omega$  i innego do obliczenia mocy zbioru  $A$ . Uczniowie obliczali  $|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$ , zaś  $|A| = 3 + 4 = 7$  lub  $|A| = 3 + 2 = 5$ . Częstym błędem zdających było podanie przy opisywaniu zdarzenia  $A$  pary  $(3, 4)$  niespełniającej warunków zadania. Zadanie pokazało, że wielu zdających ma poważne problemy z rozwiązaniem typowych zadań z rachunku prawdopodobieństwa dotyczących modelu klasycznego. Zostawianie odpowiedzi w postaci ułamka skracalnego świadczy o tym, że zdający nie czytali uważnie treści zadania i nie sprawdzali zgodności uzyskanego wyniku z poleceniem. Niestety, w dalszym ciągu zdarzały się przypadki rozwiązań, w których  $|A| > |\Omega|$ .

### Zadanie 34. (5 pkt)

W dwóch hotelach wybudowano prostokątne baseny. Basen w pierwszym hotelu ma powierzchnię  $240 \text{ m}^2$ . Basen w drugim hotelu ma powierzchnię  $350 \text{ m}^2$  oraz jest o  $5 \text{ m}$  dłuższy i  $2 \text{ m}$  szerszy niż w pierwszym hotelu. Oblicz, jakie wymiary mogą mieć baseny w obu hotelach. Podaj wszystkie możliwe odpowiedzi.

<b>Sprawdzane umiejętności</b>	
Rozwiązanie zadania, umieszczonego w kontekście praktycznym, prowadzącego do równania kwadratowego (standard III).	
<b>Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających</b>	0,45
<b>Kategoria rozwiązania</b>	
<b>Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 pkt</b>	
Wprowadzenie oznaczeń, na przykład: $x$ , $y$ - wymiary basenu w pierwszym hotelu i zapisanie równania $x \cdot y = 240$ albo równania $(x + 5) \cdot (y + 2) = 350$ .	
<b>Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt</b>	
Zapisanie układu równań z niewiadomymi $x$ i $y$ , np. $\begin{cases} x \cdot y = 240 \\ (x + 5) \cdot (y + 2) = 350 \end{cases}$	
<b>Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt</b>	
Zapisanie równania z jedną niewiadomą $x$ lub $y$ , np: $(x + 5) \cdot \left( \frac{240}{x} + 2 \right) = 350$ .	
<b>Rozwiązanie prawie całkowite ..... 4 pkt</b>	
Doprowadzenie równania wymiernego do równania kwadratowego oraz rozwiązanie równania kwadratowego, np. $x^2 - 50x + 600 = 0$ , skąd $x = 20$ lub $x = 30$ .	
<b>Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ..... 4 pkt</b>	
Zdający popełnia błąd rachunkowy w rozwiązaniu równania (ale otrzymuje dwa rozwiązania) i konsekwentnie do popełnionego błędu oblicza wymiary obu basenów.	
<b>Rozwiązanie pełne ..... 5 pkt</b>	
Zapisanie wymiarów obu basenów: Basen w pierwszym hotelu ma wymiary $30 \text{ m} \times 8 \text{ m}$ i w drugim hotelu $35 \text{ m} \times 10 \text{ m}$ lub basen w pierwszym hotelu ma wymiary $20 \text{ m} \times 12 \text{ m}$ i w drugim $25 \text{ m} \times 14 \text{ m}$ .	

**Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:**

Oznaczmy przez  $x$  długość (w metrach) basenu w pierwszym hotelu i przez  $y$  szerokość (w metrach) tego basenu (w metrach). Zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} x \cdot y = 240 \\ (x+5) \cdot (y+2) = 350 \end{cases}$$

Przekształcamy drugie równanie w sposób równoważny:  $x \cdot y + 2x + 5y + 10 = 350$ , podstawiamy do tego równania  $x \cdot y = 240$  i wyznaczamy z tego równania, niewiadomą  $x$ :

$x = \frac{100-5y}{2}$ . Wyznaczoną wartość  $x$  podstawiamy do pierwszego równania

$\frac{100-5y}{2} \cdot y = 240$  i doprowadzamy to równanie do postaci:  $y^2 - 20y + 96 = 0$ , które ma dwa

rozwiązania:  $y_1 = 8$ ,  $y_2 = 12$ .

Zatem:

- jeżeli  $y = 8$ , to  $x = 30$  i wtedy basen w pierwszym hotelu ma wymiary: 30 m x 8 m, zaś basen w drugim hotelu: 35 m x 10 m,
- jeżeli  $y = 12$ , to  $x = 20$  i wtedy basen w pierwszym hotelu ma wymiary: 20 m x 12 m, zaś basen w drugim hotelu: 25 m x 14 m.

**Komentarz:**

Zadanie okazało się dla ogółu zdających trudne, mimo że ten typ zadania pojawił się na próbnej maturze (a także w arkuszach wcześniej publikowanych na stronach internetowych CKE i OKE).

Najważniejszą umiejętnością badaną w tym zadaniu było czytanie ze zrozumieniem tekstu matematycznego i zapisywanie zależności między wielkościami opisanymi w zadaniu. Tylko połowa zdających nie miała trudności z przeprowadzeniem poprawnej analizy warunków zadania i zbudowaniem modelu matematycznego do przedstawionej sytuacji. Tylko niektórzy uczniowie stosowali prostszą metodę, prowadzącą bezpośrednio do utworzenia równania kwadratowego (z pominięciem równania wymiernego). Najwięcej błędów pojawiło się na etapie zapisywania układu równań. Zdający pisali np.:

- $$\begin{cases} x \cdot y = 240 \\ x + 5 \cdot y + 2 = 350 \end{cases}$$

albo

- $$\begin{cases} 2x + 2y = 240 \\ 2(x+5) + 2(y+2) = 350 \end{cases}$$

albo

- $$\begin{cases} 2(xy + xz + yz) = 240 \\ 2[(x+5) \cdot (y+2) + (x+5)z + (y+2)z] = 350 \end{cases}$$

Niestety, również nie wszyscy zdający potrafili poprawnie rozwiązać zapisany układ równań, popełniali błędy logiczne i rachunkowe. Pojawiały się też rozwiązania, w których zdający nie budowali układu równań, a tylko podawali wymiary jednej lub dwóch par basenów spełniających warunki zadania.


**ARKUSZ EGZAMINACYJNY – POZIOM ROZSZERZONY**
**Zadanie 1. (4 pkt)**

 Rozwiąż nierówność  $|2x+4|+|x-1|\leq 6$ .

<b>Sprawdzane umiejętności</b>		
Rozwiązywanie nierówności z wartością bezwzględną (standard IV).		
<b>Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających</b>	0,57	
<b>Kategoria rozwiązania</b>		
<b>Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp.....1 pkt</b>		
Zdający wyróżni na osi liczbowej przedziały $(-\infty, -2)$ , $\langle -2, 1 \rangle$ , $\langle 1, \infty \rangle$ .		
albo		
zapisze cztery przypadki: $\begin{cases} 2x+4 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+4 \geq 0 \\ x-1 < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+4 < 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+4 < 0 \\ x-1 < 0 \end{cases}$		
<b>Pokonanie zasadniczych trudności zadania .....2 pkt</b>		
Zdający zapisze nierówności w poszczególnych przedziałach, np.		
I. $x \in (-\infty, -2)$ $-2x-4-x+1 \leq 6$		
II. $x \in \langle -2, 1 \rangle$ $2x+4-x+1 \leq 6$		
III. $x \in \langle 1, \infty \rangle$ $2x+4+x-1 \leq 6$		
<b>Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe).....3 pkt</b>		
<ul style="list-style-type: none"> <li>• zdający poprawnie rozwiąże wszystkie trzy nierówności i wyznaczy części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami tylko w dwóch przypadkach, popełni błąd w trzecim przypadku i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca</li> </ul>		
albo		
<ul style="list-style-type: none"> <li>• zdający poprawnie rozwiązał nierówności tylko w dwóch przedziałach i wyznaczył części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca</li> </ul>		
albo		
<ul style="list-style-type: none"> <li>• zdający rozpatrzy cztery przypadki, poprawnie rozwiąże nierówności i wyznaczy części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami tylko w dwóch przypadkach, stwierdzi, że czwarty jest niemożliwy, popełni błąd w trzecim przypadku i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca</li> </ul>		
<b>Rozwiązanie pełne.....4 pkt</b>		
Zdający zapisze odpowiedź: $x \in \langle -3, 1 \rangle$ .		
<b>Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:</b>		
Wyróżniamy na osi liczbowej przedziały: $(-\infty, -2)$ , $\langle -2, 1 \rangle$ , $\langle 1, \infty \rangle$ .		
Rozwiązujemy nierówności w poszczególnych przedziałach i w każdym przedziale bierzemy część wspólną tego przedziału z otrzymanym zbiorem rozwiązań nierówności.		
$x \in (-\infty, -2)$	$x \in \langle -2, 1 \rangle$	$x \in \langle 1, \infty \rangle$



$-2x - 4 - x + 1 \leq 6$ $-3x \leq 9$ $x \geq -3$ W tym przypadku rozwiązaniem nierówności jest $-3 \leq x < 2$	$2x + 4 - x + 1 \leq 6$ $x \leq 1$ W tym przypadku rozwiązaniem nierówności jest $-2 \leq x < 1$	$2x + 4 + x - 1 \leq 6$ $3x \leq 3$ $x \leq 1$ W tym przypadku rozwiązaniem nierówności jest $x = 1$
<p>Łącząc otrzymane rozwiązania, podajemy ostateczną odpowiedź: <math>-3 \leq x \leq 1</math> lub zapisujemy odpowiedź: Zbiorem rozwiązań nierówności jest <math>\langle -3, 1 \rangle</math>.</p>		
<p><b>Komentarz:</b>  Zadanie okazało się dla ogółu zdających umiarkowanie trudne. Pojawiające się w rozwiązaniach błędy pokazują, że część zdających nie opanowała w dostatecznym stopniu umiejętności stosowania definicji wartości bezwzględnej, mimo że zadanie z wartością bezwzględną pojawia się corocznie na egzaminie maturalnym. Stąd na przykład błędy:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>-6 \leq 2x + 4 + x - 1 \leq 6</math></li> </ul> <p>albo</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><math>2x + 4 + x - 1 \leq 6 \vee -2x - 4 - x + 1 \leq 6</math>.</li> </ul> <p>W prezentowanych rozwiązaniach najczęściej brakowało jednak wyznaczenia części wspólnej przedziału z otrzymanym zbiorem rozwiązań nierówności. Pojawiały się też liczne błędy rachunkowe. Na podkreślenie zasługuje fakt, że poprawne rozwiązanie zadania przedstawiła duża grupa zdających.</p>		

**Zadanie 2. (4 pkt)**

Wyznacz wszystkie rozwiązania równania  $2 \cos^2 x - 5 \sin x - 4 = 0$  należące do przedziału  $\langle 0, 2\pi \rangle$ .

<b>Sprawdzane umiejętności</b>	
Rozwiązywanie równania trygonometrycznego (standard IV).	
<b>Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających</b>	0,70
<b>Kategoria rozwiązania</b>	
<b>Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania ..... 1 pkt</b>	
Zapisanie równania w zależności od jednej funkcji trygonometrycznej, np. $-2 \sin^2 x - 5 \sin x - 2 = 0$ lub $2 \sin^2 x + 5 \sin x + 2 = 0$ .	
<b>Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp..... 2 pkt</b>	
Wprowadzenie pomocniczej niewiadomej, np. $t = \sin x$ , zapisanie równania w postaci $-2t^2 - 5t - 2 = 0$ lub $2t^2 + 5t + 2 = 0$ .	
<b>Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt</b>	
Rozwiązanie równania kwadratowego ( $t = -2$ lub $t = -\frac{1}{2}$ ) i odrzucenie rozwiązania $t = -2$ .	
<b>Rozwiązanie pełne..... 4 pkt</b>	
Rozwiązanie równania w podanym przedziale: $x = \frac{7}{6}\pi$ lub $x = \frac{11}{6}\pi$ .	

**Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:**

Przekształcamy równanie do postaci, w której występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna:

$$2(1 - \sin^2 x) - 5 \sin x - 4 = 0$$

Porządkujemy to równanie i wprowadzamy niewiadomą pomocniczą:

$-2 \sin^2 x - 5 \sin x - 2 = 0$ ,  $t = \sin x$ , gdzie  $t \in \langle -1, 1 \rangle$ . Równanie przyjmuje teraz postać:

$$2t^2 + 5t + 2 = 0$$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe ze zmienną  $t$ :

$$\Delta = 9 \quad t_1 = -2 \quad t_2 = -\frac{1}{2} \text{ ale } t_1 \notin \langle -1, 1 \rangle$$

Zapisujemy zatem rozwiązania równania  $\sin x = -\frac{1}{2}$  należące do przedziału  $\langle 0, 2\pi \rangle$ :

$$x = \frac{11\pi}{6} \text{ i } x = \frac{7\pi}{6}$$

**Komentarz:**

Zadanie okazało się dla ogółu zdających łatwe.

Zdający, którzy przystąpili do rozwiązania równania, zazwyczaj nie mieli problemów z doбором strategii zapewniającej sukces w rozwiązaniu zadania. „Jedynka trygonometryczna” to zależność dobrze znana i umiejętnie stosowana przez większość z nich. Problemu nie sprawiało również rozwiązanie równania kwadratowego, choć tutaj najczęściej zdający popełniali błędy logiczne i rachunkowe, np.:

$$-2t^2 - 5t - 2 = 0$$

$$t = \frac{5+3}{2} = 4 \text{ lub } t = \frac{5-3}{2} = 1.$$

Warto również podkreślić, iż zdający nie mieli problemu z rozwiązaniem elementarnego równania trygonometrycznego  $\sin x = -\frac{1}{2}$ , chociaż nie zawsze pamiętali o wskazaniu rozwiązań z przedziału  $\langle 0, 2\pi \rangle$ .

**Zadanie 3. (4 pkt)**

Bok kwadratu  $ABCD$  ma długość 1. Na bokach  $BC$  i  $CD$  wybrano odpowiednio punkty  $E$  i  $F$  umieszczone tak, by  $|CE| = 2|DF|$ . Oblicz wartość  $x = |DF|$ , dla której pole trójkąta  $AEF$  jest najmniejsze.

**Sprawdzane umiejętności**

Rozwiązywanie zadania w kontekście praktycznym prowadzącego do badania funkcji kwadratowej (standard IV).

**Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających**

0,32

**Kategoria rozwiązania**

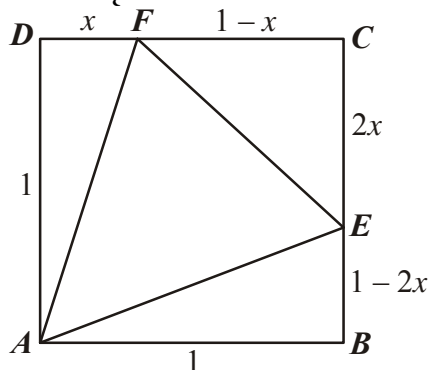
**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania..... 1 pkt**

Zapisanie, że  $P_{AEF} = P_{ABCD} - P_{ADF} - P_{CEF} - P_{ABE}$  lub  $P_{AEF} = P_{ABCD} - (P_{ADF} + P_{CEF} + P_{ABE})$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp..... 2 pkt**

Zapisanie pól trójkątów  $ADF$ ,  $ABE$  i  $CEF$ :  $P_{\Delta ADF} = \frac{1}{2}x$ ,  $P_{\Delta ABE} = \frac{1-2x}{2}$

i  $P_{\Delta CEF} = \frac{-2x^2 + 2x}{2} = -x^2 + x$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania .....3 pkt**Zapisać  $P_{AEF}$  w postaci trójmianu kwadratowego zmiennej  $x$ :  $P(x) = x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ .**Rozwiązanie pełne.....4 pkt**Wyznaczenie  $x$ , dla którego funkcja przyjmuje minimum:  $x = \frac{1}{4}$ .**Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:**Długości odcinków  $|BE|$  i  $|CF|$  są równe:  $|BE| = 1 - 2x$ ,  $|CF| = 1 - x$ .Pole trójkąta  $AEF$  jest więc równe:

$$P_{AEF} = P_{ABCD} - P_{ABE} - P_{ECF} - P_{FDA} = 1 - \frac{1}{2}(1 - 2x) - \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot (1 - x) - \frac{1}{2}x = x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

Pole trójkąta  $AEF$  jest funkcją zmiennej  $x$ :  $P(x) = x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$  dla  $x \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$ .

Ponieważ  $x_w = -\frac{-\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$  a parabola o równaniu  $P(x) = x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$  ma ramiona skierowane „ku górze”, więc dla  $x = \frac{1}{4}$  pole trójkąta  $AEF$  jest najmniejsze.

**Komentarz:**

Zadanie okazało się dla ogółu zdających trudne.

Błędy występowały już na etapie wprowadzenia oznaczeń, maturzyści zapisywali np.  $|CE| = \frac{1}{2}x$ lub przyjmowali, że  $|DF| = \frac{1}{3}$  a  $|CE| = \frac{2}{3}$ . Pojawiały się też błędy związane z obliczeniem pola trójkąta  $AEF$ . Zdający:

- zapominali o współczynniku  $\frac{1}{2}$  we wzorze na pole trójkąta i zapisywali, np.

$$P_{AEF} = 1 - (1 - 2x) - 2x(1 - x) - x = 2x^2 - x$$

- nie potrafili poprawnie przekształcić wyrażenia algebraicznego i zapisywali, np.

$$1 - \frac{1}{2}(1 - 2x) - \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot (1 - x) - \frac{1}{2}x = 1 - \frac{1}{2} - x - x - x^2 - \frac{1}{2}x$$

- popelniali błędy rachunkowe.

Zdający, którzy poprawnie zapisali pole trójkąta  $AEF$  jako funkcję zmiennej  $x$ , z reguły nie mieli kłopotów z rozwiązaniem problemu optymalizacyjnego.

**Zadanie 4. (4 pkt)**

Wyznacz wartości  $a$  i  $b$  współczynników wielomianu  $W(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$  wiedząc, że  $W(2) = 7$  oraz, że reszta z dzielenia  $W(x)$  przez  $(x-3)$  jest równa 10.

<b>Sprawdzane umiejętności</b> Zastosowanie twierdzenia o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian (standard IV).	
<b>Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających</b>	0,68
<b>Kategoria rozwiązania</b>	
<b>Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego do rozwiązania zadania</b> ..... 1 pkt Zapisanie jednego z równań: $8 + 4a + 2b + 1 = 7$ albo $27 + 9a + 3b + 1 = 10$ .	
<b>Pokonanie zasadniczych trudności zadania</b> ..... 2 pkt Zapisanie układu równań: $\begin{cases} 8 + 4a + 2b + 1 = 7 \\ 27 + 9a + 3b + 1 = 10 \end{cases}$	
<b>Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)</b> ..... 3 pkt Rozwiązanie układu równań z błędem rachunkowym.	
<b>Rozwiązanie pełne</b> ..... 4 pkt Rozwiązanie układu równań $\begin{cases} a = -5 \\ b = 9 \end{cases}$	
<b>Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:</b> Z treści zadania i twierdzenia Bézout wynika, że $W(2) = 7$ i $W(3) = 10$ . Zapisujemy układ równań $\begin{cases} 8 + 4a + 2b + 1 = 7 \\ 27 + 9a + 3b + 1 = 10 \end{cases}$ Równanie $27 + 9a + 3b + 1 = 10$ możemy otrzymać z warunku $W(3) = 10$ lub wykonując dzielenie wielomianów i zapisując, że reszta z dzielenia jest równa 10.  Rozwiązujemy układ równań otrzymując kolejno $\begin{cases} 4a + 2b = -2 \\ 9a + 3b = -18 \\ b = -2a - 1 \\ 9a - 6a - 3 = -18 \\ a = -5 \\ b = 9 \end{cases}$ Warunki zadania są spełnione dla $a = -5$ , $b = 9$ .	
<b>Komentarz:</b> Zadanie okazało się dla ogółu zdających łatwe. Kluczowy dla rozwiązania tego zadania okazał się zapis $W(3) = 10$ . Większość zdających bez problemu	

poradziła sobie z tą umiejętnością, choć pojawiały się także inne zapisy, np.  $W(x-3)=10$  albo  $W(3)=0$ . Jednak najczęściej błędów zdający popełniali na etapie rozwiązywania układu równań, czyli w umiejętności, która na poziomie rozszerzonym nie powinna sprawiać żadnych trudności.

**Zadanie 5. (5 pkt)**

O liczbach  $a$ ,  $b$ ,  $c$  wiemy, że ciąg  $(a, b, c)$  jest arytmetyczny i  $a+c=10$ , zaś ciąg  $(a+1, b+4, c+19)$  jest geometryczny. Wyznacz te liczby.

**Sprawdzane umiejętności**

Wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego do rozwiązania zadania (standard III).

**Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających**

0,77

**Kategoria rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny do pełnego rozwiązania zadania**

.....1 pkt

Wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego (geometrycznego) i zapisanie odpowiedniego równania, np.  $2b = a + c$  albo  $(b+4)^2 = (a+1)(c+19)$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** .....2 pkt

Wykorzystanie własności obu ciągów (arytmetycznego i geometrycznego) i zapisanie układu równań

umożliwiającego obliczenie liczb  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , np. 
$$\begin{cases} 2b = a + c \\ a + c = 10 \\ (b+4)^2 = (a+1) \cdot (c+19) \end{cases}$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** .....3 pkt

Przekształcenie układu równań do równania kwadratowego z niewiadomą  $c$  lub  $a$ , np.

$$c^2 + 8c - 128 = 0 \text{ lub } a^2 - 28a + 52 = 0$$

**Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)** .....4 pkt

- poprawne rozwiązanie równania kwadratowego, odrzucenie jednego z rozwiązań i poprawne wyznaczenie drugiej trójki liczb
- albo
- przekształcenie układu równań z jedną niewiadomą do równania kwadratowego z błędem rachunkowym, np. błąd w redukcji wyrazów podobnych lub w przepisywaniu i konsekwentne doprowadzenie rozwiązania do końca (o ile otrzymane równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki rzeczywiste).

**Rozwiązanie pełne** ..... 5 pkt

Wyznaczenie szukanych liczb:  $a = 2$ ,  $b = 5$ ,  $c = 8$  lub  $a = 26$ ,  $b = 5$ ,  $c = -16$ .

**Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:**

Z własności ciągu arytmetycznego mamy:  $2b = a + c$ . Stąd otrzymujemy  $2b = 10$ , czyli  $b = 5$ .

Z własności ciągu geometrycznego zapisujemy równanie:  $(b+4)^2 = (a+1) \cdot (c+19)$ .



Zatem otrzymujemy układ równań, np. 
$$\begin{cases} b = 5 \\ a + c = 10 \\ (b + 4)^2 = (a + 1) \cdot (c + 19) \end{cases}$$

Z drugiego równania wyznaczamy  $a = 10 - c$  lub  $c = 10 - a$  i wstawiamy do trzeciego równania. Otrzymujemy równanie, np.  $9^2 = (10 - c + 1)(c + 19)$  lub  $9^2 = (a + 1)(10 - a + 19)$ . Przekształcamy to równanie i otrzymujemy równanie z niewiadomą  $c$  lub  $a$ , np.

$$c^2 + 8c - 128 = 0 \text{ lub } a^2 - 28a + 52 = 0.$$

Rozwiązaniami tego równania są :

$$c_1 = 8, c_2 = -16 \text{ lub } a_1 = 2, a_2 = 26.$$

Zatem szukanymi liczbami są:  $a = 2, b = 5, c = 8$  lub  $a = 26, b = 5, c = -16$

#### **Komentarz:**

Zadanie okazało się dla ogółu zdających łatwe i jednocześnie było dla nich najłatwiejszym zadaniem w tym arkuszu.

Kolejny raz okazało się, że zdający nie mieli problemów z interpretacją treści zadania (w tym z wykorzystaniem własności obu ciągów). Trudności pojawiły się jednak na etapie rozwiązywania układu równań. Najczęściej były to błędy rachunkowe. Wielu zdających miało też problemy z właściwą interpretacją otrzymanych wyników i odrzucało rozwiązanie  $c_2 = -16$  jako niespełniające warunków zadania.

#### **Zadanie 6. (5 pkt)**

Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których równanie  $x^2 + mx + 2 = 0$  ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste takie, że suma ich kwadratów jest większa od  $2m^2 - 13$ .

#### **Sprawdzane umiejętności**

Przeprowadzenie dyskusji dotyczącej rozwiązań równania kwadratowego z parametrem (standard IV).

**Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających**

0,58

#### **Kategoria rozwiązania**

Rozwiązanie zadania składa się z trzech części.

a) Pierwsza polega na rozwiązaniu nierówności  $\Delta > 0$ ,  $m \in (-\infty, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, \infty)$ .  
Za poprawne rozwiązanie tej części zdający otrzymuje **1 punkt**.

b) Druga polega na rozwiązaniu nierówności  $x_1^2 + x_2^2 > 2m^2 - 13$ ,  $m \in (-3, 3)$ .  
Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **3 punkty**.

c) Trzecia polega na wyznaczeniu części wspólnej rozwiązań nierówności z a) i b).  
Za poprawne rozwiązanie trzeciej części zdający otrzymuje **1 punkt**.

W ramach drugiej części rozwiązania wyróżniamy następujące kategorie:

**Rozwiązanie, w którym postępowanie jest niewielkie, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania**  
..... **1 pkt**

- zapisanie nierówności  $x_1^2 + x_2^2 > 2m^2 - 13$  w postaci równoważnej  $m^2 - 4 > 2m^2 - 13$

albo

- wykorzystanie wzorów na pierwiastki trójmianu kwadratowego i zapisanie nierówności

$$\left(\frac{-m + \sqrt{m^2 - 8}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-m - \sqrt{m^2 - 8}}{2}\right)^2 > 2m^2 - 13.$$

**Pokonanie zasadniczych trudności** ..... 2 pkt

Doprowadzenie do postaci nierówności kwadratowej  $m^2 - 9 < 0$ .

**Rozwiązanie pełne** ..... 3 pkt

Rozwiązanie nierówności:  $m \in (-3, 3)$ .

**Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:**

$$x^2 + mx + 2 = 0$$

Zapisujemy układ nierówności:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1^2 + x_2^2 > 2m^2 - 13 \end{cases}$$

Rozwiązujemy pierwszą nierówność tego układu:

$$\Delta = m^2 - 8$$

$$\Delta > 0$$

$$m^2 - 8 > 0$$

$$m \in (-\infty, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, \infty)$$

Aby rozwiązać drugą nierówność, najpierw przekształcimy lewą stronę nierówności, korzystając ze wzorów Viète'a:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-m)^2 - 2 \cdot 2 = m^2 - 4$$

Rozwiązujemy zatem nierówność:

$$m^2 - 4 > 2m^2 - 13$$

$$m^2 - 9 < 0, \text{ więc } m \in (-3, 3)$$

Wyznaczymy wspólną część zbiorów rozwiązań układu nierówności:

$$m \in (-\infty, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, \infty) \text{ i } m \in (-3, 3),$$

$$\text{więc } m \in (-3, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, 3).$$

**Komentarz:**

Zadanie okazało się dla ogółu zdających umiarkowanie trudne.

Był to typowy problem z zakresu funkcji kwadratowej (pojawiający się w arkuszach maturalnych), dlatego zdający nie mieli problemu z doбором strategii rozwiązania tego zadania. Błędy najczęściej pojawiały się na etapie rozwiązania nierówności  $x_1^2 + x_2^2 > 2m^2 - 13$ . Zdający nie potrafili zapisać

wyrażenia  $x_1^2 + x_2^2$  za pomocą wzorów Viète'a, przyjmując np.  $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2$  lub korzystając

z wzorów, zapisywali je błędnie:  $x_1 + x_2 = \frac{-b}{2a}$  i  $x_1x_2 = \frac{c}{2a}$ . Nie wszyscy zdający pamiętali także

o konieczności rozważenia warunku  $\Delta > 0$ .

**Zadanie 7. (6 pkt)**

Punkt  $A = (-2, 5)$  jest jednym z wierzchołków trójkąta równoramiennego  $ABC$ , w którym  $|AC| = |BC|$ . Pole tego trójkąta jest równe 15. Bok  $BC$  jest zawarty w prostej o równaniu  $y = x + 1$ . Oblicz współrzędne wierzchołka  $C$ .

**Sprawdzane umiejętności**

Zastosowanie równania do opisanego zależności w prostokątnym układzie współrzędnych (standard IV).

**Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających**

0,38

**Kategoria rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania** ..... 1 pkt

Obliczenie odległości punktu  $A$  od prostej  $y = x + 1$ :  $d = 3\sqrt{2}$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ..... 2 pkt

Obliczenie długości odcinków  $AC$  i  $BC$ :  $|AC| = |BC| = 5\sqrt{2}$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 4 pkt

Ułożenie układu równań pozwalającego obliczyć współrzędne punktu  $C$  (odległość  $|AC| = 5\sqrt{2}$  oraz punkt  $C$  należy do prostej o równaniu  $y = x + 1$ )

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ (x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 50 \end{cases}$$

i zapisanie równania kwadratowego:  $x^2 - 2x - 15 = 0$ .

**Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)** ..... 5 pkt

**Rozwiązanie pełne** ..... 6 pkt

Wyznaczenie współrzędnych punktu  $C$ :  $C = (5, 6)$  lub  $C = (-3, -2)$ .

**Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:**

Obliczamy odległość punktu  $A$  od prostej  $y = x + 1$ :  $d = \frac{|-2 - 5 + 1|}{\sqrt{1 + 1}} = 3\sqrt{2}$ .

Obliczona odległość  $d$  jest równa wysokości trójkąta  $ABC$  poprowadzonej do boku  $BC$ . Znamy pole trójkąta  $ABC$ , więc obliczamy długość boku  $BC$ .

$$P_{ABC} = 15 \quad \frac{1}{2}d \cdot |BC| = 15 \quad |BC| = \frac{30}{3\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$$

Punkt  $C = (x, y)$  leży na prostej o równaniu  $y = x + 1$ , zatem  $C = (x, x + 1)$ .

Ponieważ  $|AC| = |BC|$ , więc ze wzoru na długość odcinka zapisujemy równanie:

$$\sqrt{(x + 2)^2 + (x + 1 - 5)^2} = 5\sqrt{2}.$$

Rozwiązujemy otrzymane równanie:

$$\sqrt{(x + 2)^2 + (x + 1 - 5)^2} = 5\sqrt{2}$$

$$x^2 + 4x + 4 + x^2 - 8x + 16 = 50$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$\Delta = 64 \quad x_1 = 5 \quad x_2 = -3 \text{ i następnie } y_1 = 6 \quad y_2 = -2$$

Ostatecznie otrzymujemy dwa punkty:  $C_1 = (5, 6)$   $C_2 = (-3, -2)$ .

**Komentarz:**

Zadanie okazało się dla ogółu zdających trudne.

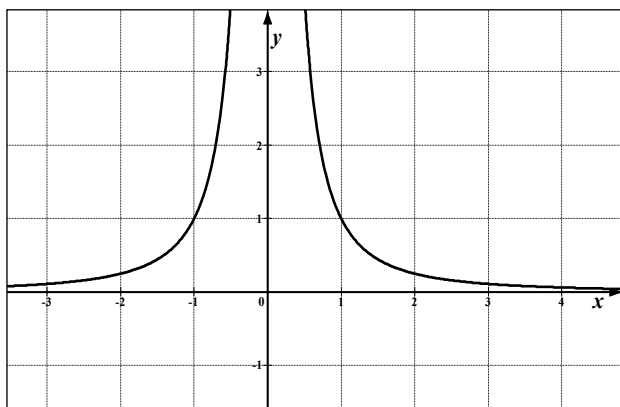
Analizując rozwiązania, można zauważyć, że zdający, którzy podjęli próbę rozwiązania tego problemu, potrafili wykorzystać informację o polu trójkąta, tzn. obliczyć długość boku  $BC$ . Niestety, w dalszej części rozwiązania najczęściej popełnianym błędem było przyjęcie, że  $|AB| = |AC|$ . Pojawiły się także rozwiązania, w których zdający po obliczeniu długości odcinków  $AD$ ,  $AC$  i  $CD$  (punkt  $D$  jest rzutem prostokątnym punktu  $A$  na prostą o równaniu  $y = x + 1$ ) odczytywali współrzędne punktu  $C$  z rysunku, gubiąc jedno rozwiązanie.

Podczas rozwiązywania tego zadania zdający popełniali wiele błędów rachunkowych.



**Zadanie 8. (5 pkt)**

Rysunek przedstawia fragment wykresu funkcji  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ . Przeprowadzono prostą równoległą do osi  $Ox$ , która przecięła wykres tej funkcji w punktach  $A$  i  $B$ . Niech  $C = (3, -1)$ . Wykaż, że pole trójkąta  $ABC$  jest większe lub równe 2.

**Sprawdzane umiejętności**

Przeprowadzenie dowodu algebraicznego (standard V).

**Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających**

0,25

**Kategoria rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania .....1 pkt**

Zapisanie współrzędnych dwóch punktów leżących na wykresie funkcji  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  oraz na prostej

równoległej do osi  $Ox$ , np.  $A = \left(x, \frac{1}{x^2}\right)$ ,  $B = \left(-x, \frac{1}{x^2}\right)$ , gdzie  $x > 0$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .....2 pkt**

Zapisanie długości odcinka  $AB$  oraz wysokości  $h$  trójkąta  $ABC$ , np.:  $|AB| = 2|x|$  i  $h = \frac{1}{x^2} + 1$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania .....3 pkt**

Zapisanie pola trójkąta  $ABC$  w zależności od jednej zmiennej:  $P_{ABC} = \frac{2 \cdot |x| \cdot \left|\frac{1}{x^2} + 1\right|}{2} = \frac{1}{|x|} + |x|$ .

**Rozwiązanie pełne ..... 5pkt**

Uzasadnienie, że  $\frac{1}{|x|} + |x| \geq 2$ .

**Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:**

Zapisujemy współrzędne dwóch punktów leżących na wykresie funkcji  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  oraz na prostej

równoległej do osi  $Ox$ , np.  $A = \left(x, \frac{1}{x^2}\right)$ ,  $B = \left(-x, \frac{1}{x^2}\right)$ , gdzie  $x \neq 0$ .

Zapisujemy pole trójkąta  $ABC$ , gdzie  $C = (3, -1)$  w zależności od jednej zmiennej:

$$P_{ABC} = \frac{2 \cdot |x| \cdot \left(\frac{1}{x^2} + 1\right)}{2} = \frac{1}{|x|} + |x|.$$

Należy udowodnić, że pole trójkąta  $ABC$  jest większe lub równe 2, czyli  $\frac{1}{|x|} + |x| \geq 2$ , dla  $x \neq 0$ .

Wystarczy wobec tego udowodnić (lub powołać się na znaną nierówność), że dla dowolnej liczby  $a > 0$  zachodzi nierówność  $\frac{1}{a} + a \geq 2$ . Po pomnożeniu obu stron nierówności przez  $a$  otrzymujemy nierówność równoważną  $1 + a^2 \geq 2a$ , czyli  $a^2 - 2a + 1 \geq 0$ , a więc nierówność  $(a-1)^2 \geq 0$ , co kończy dowód.

#### Komentarz:

Zadanie okazało się dla ogółu zdających trudne.

Prawie 7% maturzystów nie podjęło próby rozwiązania tego problemu, co potwierdza, że zadania typu „wykaż” budzą obawy także wśród zdających matematykę na poziomie rozszerzonym. Uczniowie, którzy przystąpili do rozwiązywania tego zadania, z reguły nie mieli problemu z zapisaniem pola trójkąta  $ABC$  w zależności od jednej zmiennej. Trudności pojawiały się na etapie uzasadnienia, że  $\frac{1}{|x|} + |x| \geq 2$ . Zdający pisali na przykład:

- $\frac{1}{x} + x \geq 2, x \neq 0$ , czyli  $1 + x^2 \geq 2x, x \neq 0$
- $\frac{1}{x} + x \geq 2$ , zatem  $\frac{1 - 2x + x^2}{x} \geq 0$ , czyli  $x(1 - 2x + x^2) \geq 0$  dla  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

albo dowodzili prawdziwości nierówności  $\frac{1}{a} + a \geq 2$  bez założenia, że  $a > 0$ .

Pojawiały się też rozwiązania, w których zdający dowodzili, że pole trójkąta  $ABC$  jest większe lub równe 2 dla wybranych punktów  $A, B$ , spełniających warunki zadania, np.

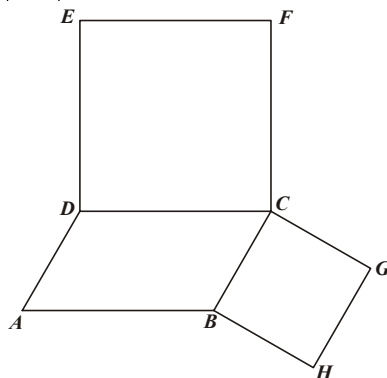
$$A = (1, 1), B = (-1, 1) C = (3, -1)$$

$$|AB| = 2 \text{ i } h = 2$$

$$P_{ABC} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2 \geq 2.$$

#### Zadanie 9. (4 pkt)

Na bokach  $BC$  i  $CD$  równoległoboku  $ABCD$  zbudowano kwadraty  $CDEF$  i  $BCGH$  (zobacz rysunek). Udowodnij, że  $|AC| = |FG|$ .



<b>Sprawdzane umiejętności</b> Przeprowadzenie dowodu geometrycznego (standard V).	
<b>Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających</b>	0,54
<b>Kategoria rozwiązania</b>	
<b>Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania</b> ..... 1 pkt Zaznaczenie na rysunku odcinków $AC$ i $FG$ oraz zapisanie równości $ AB = CF $ i $ BC = CG $ .	
<b>Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp</b> ..... 2 pkt Stwierdzenie, że trójkąty $ABC$ i $FCG$ są przystające, na podstawie cechy (bkb), bez podania pełnego uzasadnienia równości kątów $ \sphericalangle FCG = \sphericalangle ABC $ .	
<b>Pokonanie zasadniczych trudności zadania</b> ..... 3 pkt	
<ul style="list-style-type: none"> <li>Stwierdzenie, że trójkąty <math>ABC</math> i <math>FCG</math> są przystające, wraz z podaniem pełnego uzasadnienia równości kątów <math> \sphericalangle FCG = \sphericalangle ABC </math> i niezapisanie wniosku, że <math> AC = FG </math>.</li> </ul> albo <ul style="list-style-type: none"> <li>Stwierdzenie, że trójkąty <math>ABC</math> i <math>FCG</math> są przystające, na podstawie cechy (bkb), bez podania pełnego uzasadnienia równości kątów <math> \sphericalangle FCG = \sphericalangle ABC </math>, oraz zapisanie wniosku, że <math> AC = FG </math>.</li> </ul>	
<b>Rozwiązanie pełne</b> ..... 4 pkt Zapisanie wniosku, że $ AC = FG $ .	
<b>Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:</b> Czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem, czworokąt $DCFE$ jest kwadratem, więc $ AB = CD = CF $ . W kwadracie $CBHG$ odcinki $BC$ i $CG$ są równe. Niech $\alpha$ oznacza kąt $ABC$ danego równoległoboku. Wówczas $ \sphericalangle BCD =180^\circ-\alpha$ . W kwadratach $CDEF$ oraz $CBHG$ mamy $ \sphericalangle DCF = \sphericalangle BCG =90^\circ$ , więc $ \sphericalangle FCG =360^\circ-(180^\circ-\alpha)-90^\circ-90^\circ=\alpha= \sphericalangle ABC $ . W trójkątach $ABC$ i $FCG$ mamy zatem: $ AB = CF $ , $ BC = CG $ oraz $ \sphericalangle FCG = \sphericalangle ABC $ , więc trójkąty $ABC$ i $FCG$ są przystające (cecha $bkb$ ). Stąd wnioskujemy, że $ AC = FG $ .	
<b>Komentarz:</b> Zadanie okazało się dla ogółu zdających umiarkowanie trudne. Większość zdających próbowała zmierzyć się z problemem przeprowadzenia dowodu matematycznego zapewne ze względu na przyjazne treści. Rozwiązanie tego problemu wymagało bowiem od zdających znajomości podstawowych wiadomości dotyczących przystawiania trójkątów, umiejętności logicznego formułowania i uzasadniania wniosków oraz poprawnego ich zapisywania w języku matematyki. Na podstawie analizy rozwiązań uczniowskich można zauważyć, że zdający nie mieli problemów ze stwierdzeniem, że trójkąty $ABC$ i $FCG$ są przystające na podstawie cechy ( $bkb$ ). Niestety, niewielu zdających uzasadniało równość kątów $ \sphericalangle FCG = \sphericalangle ABC $ .	

**Zadanie 10. (4 pkt)**

Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w trzech rzutach symetryczną sześcienną kostką do gry suma kwadratów liczb uzyskanych oczek będzie podzielna przez 3.



<b>Sprawdzane umiejętności</b>	
Obliczenie prawdopodobieństwa z wykorzystaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa (standard III).	
<b>Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających</b>	0,28
<b>Kategoria rozwiązania</b>	
<b>Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny do rozwiązania zadania ..... 1 pkt</b>	
Zdający zapisze, że $ \Omega  = 6^3$ i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.	
<b>Istotny postęp. .... 2 pkt</b>	
Zdający zapisze, że suma kwadratów trzech liczb jest podzielna przez 3 tylko wtedy, gdy wszystkie liczby są podzielne przez 3 albo wszystkie są niepodzielne przez 3.	
<b>Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt</b>	
Zdający poprawnie obliczy liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zajściu zdarzenia A: $ A  = 72$ i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie	
<b>Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt</b>	
$P(A) = \frac{1}{3}$	
<b>Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:</b>	
Zdarzeniami elementarnymi są trzywyrazowe ciągi o wartościach w zbiorze sześcioelementowym. Mamy model klasyczny. $ \Omega  = 6^3 = 216$ .	
Określamy zdarzenie A – suma kwadratów liczb uzyskanych oczek będzie podzielna przez 3.	
Reszta z dzielenia kwadratu liczby całkowitej przez 3 może być równa 0 lub 1. Suma trzech kwadratów będzie podzielna przez 3 wtedy, gdy każdy z nich będzie podzielny przez 3 albo gdy reszta z dzielenia każdego z nich przez 3 będzie równa 1.	
Kwadraty liczb 3 i 6 są liczbami podzielnymi przez 3.	
Kwadraty liczb 1, 2, 4 i 5 dają z dzielenia przez 3 resztę 1.	
$ A $ możemy obliczać następująco:	
<ul style="list-style-type: none"> <li>- ciągi o wartościach ze zbioru <math>\{3,6\}</math> – jest ich <math>2^3 = 8</math>,</li> <li>- ciągi o wartościach ze zbioru <math>\{1,2,4,5\}</math> – jest ich <math>4^3 = 64</math>,</li> </ul>	
czyli $ A  = 2^3 + 4^3 = 72$	
Zatem $P(A) = \frac{72}{216} = \frac{1}{3}$ .	
<b>Komentarz:</b>	
Zadanie okazało się dla ogółu zdających trudne.	
Większość zdających potrafiła określić liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych, czyli zapisać $ \Omega  = 6^3$ . Problemy pojawiły się natomiast na etapie opisanie zbioru zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A. Niewielu zdających zapisało, że suma kwadratów trzech liczb jest podzielna przez 3 tylko wtedy, gdy wszystkie liczby są podzielne przez 3 albo wszystkie są niepodzielne przez 3. Pojawiały się natomiast obliczenia, np. $ A  = 2^3$ albo $ A  = 4^3$ , albo $ A  = C_6^2 \cdot C_6^2 \cdot C_6^2 + C_6^4 \cdot C_6^4 \cdot C_6^4$ .	
Nieliczna grupa zdających próbowała rozwiązać to zadanie, wypisując wszystkie 216 zdarzeń elementarnych i sprawdzając, które z nich spełniają podany warunek. Próby te z reguły kończyły się sukcesem.	

**Zadanie 11. (4 pkt)**

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość  $a$ . Ściany boczne są trójkątami ostrokątnymi. Miara kąta między sąsiednimi ścianami bocznymi jest równa  $2\alpha$ . Wyznacz objętość tego ostrosłupa.

**Sprawdzane umiejętności**

Wyznaczenie objętości wielościanu z wykorzystaniem trygonometrii (standard IV).

**Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających**

0,23

**Kategoria rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny do pełnego rozwiązania zadania** .....

**1 pkt**

Wykonanie rysunku ostrosłupa i zaznaczenie na nim kąta między sąsiednimi ścianami bocznymi.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny** .....

**2 pkt**

Wyznaczenie wysokości  $EF$  trójkąta  $ABE$  w zależności od  $a$  i  $\alpha$ :  $m = \frac{a}{2\operatorname{tg}\alpha}$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** .....

**3 pkt**

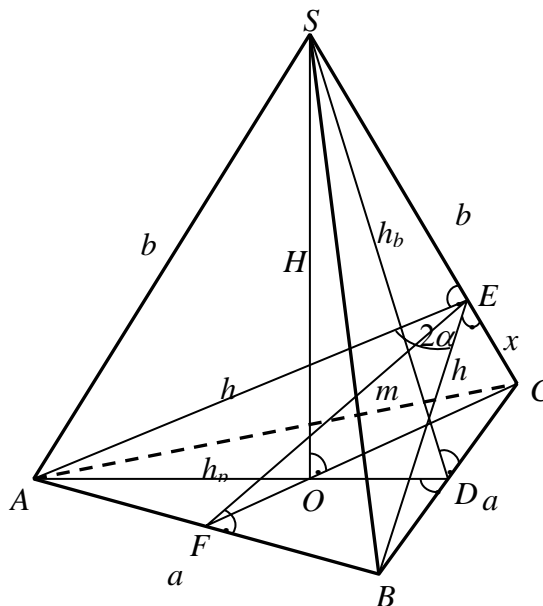
Wyznaczenie długości odcinka  $EC$ :  $x = \frac{a\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}{2\sin\alpha}$ .

**Rozwiązanie prawie całkowite** .....

**4 pkt**

Wyznaczenie wysokości ostrosłupa:  $H = \frac{a\cos\alpha}{\sqrt{3(4\sin^2\alpha - 1)}}$ .

**Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:**



Wysokość podstawy ostrosłupa jest równa  $h_p = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .



Wyznaczamy wysokość  $FE$  trójkąta równoramiennego  $ABE$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|FB|}{|BE|} = \frac{\frac{1}{2}a}{m}, \text{ stąd } m = \frac{a}{2\operatorname{tg} \alpha}.$$

Wyznaczamy długość odcinka  $EC$  z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie  $FCE$ :

$$x = \sqrt{h_p^2 - m^2}$$

$$x = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2\operatorname{tg} \alpha}\right)^2} = a\sqrt{\frac{3\operatorname{tg}^2 \alpha - 1}{4\operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{a\sqrt{4\sin^2 \alpha - 1}}{2\sin \alpha}$$

Z podobieństwa trójkątów  $OCS$  i  $ECF$  mamy

$$\frac{|OS|}{|OC|} = \frac{|EF|}{|EC|}, \text{ czyli } \frac{H}{\frac{2}{3}h_p} = \frac{m}{x}.$$

$$\text{Stąd } H = \frac{m \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{4\sin^2 \alpha - 1}}{2\sin \alpha}} = \frac{\frac{a}{2\operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{a\sqrt{4\sin^2 \alpha - 1}}{2\sin \alpha}} = \frac{a \cos \alpha}{\sqrt{3}\sqrt{4\sin^2 \alpha - 1}}$$

Wyznaczamy objętość ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a \cos \alpha}{\sqrt{3}\sqrt{4\sin^2 \alpha - 1}} = \frac{a^3 \cos \alpha}{12\sqrt{4\sin^2 \alpha - 1}}.$$

#### **Komentarz:**

Zadanie okazało się dla ogółu zdających trudne i jednocześnie było najtrudniejszym zadaniem w tym arkuszu.

Rozwiązywanie tego zadania wymagało przede wszystkim opanowania wiadomości dotyczących kąta dwuściennego i uważnej analizy jego treści, a co za tym idzie – opracowania strategii rozwiązania obliczenia wysokości ostrosłupa. Zdający popełniali błędy już na etapie wykonywania rysunku pomocniczego, niewłaściwie zaznaczając kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi. Pojawiały się błędy rachunkowe i logiczne. Wielu zdających ograniczyło się tylko do wyznaczenia wysokości ściany bocznej ostrosłupa, np.

$$\sin \alpha = \frac{|FB|}{|BE|} = \frac{\frac{1}{2}a}{h}, \text{ stąd } h = \frac{a}{2\sin \alpha}, \text{ nie mając pomysłu na rozwiązanie postawionego}$$

w zadaniu problemu.

## 5 Podsumowanie i wnioski

Wyniki egzaminu maturalnego świadczą o tym, że zdający poprawnie rozwiązywali zadania typowe, o małym stopniu złożoności lub zadania podobne do tych, które występowały na poprzednich egzaminach, włącznie z egzaminem próbnym. W przypadku zadań nietypowych, wymagających rozwiązywania problemów matematycznych, większość zdających miała problemy już na etapie analizy zadania. Duży procent opuszczeń wystąpił w zadaniach na dowodzenie.

W pracy dydaktycznej z uczniami należy zwrócić uwagę na kształcenie umiejętności analizy warunków zadania i doboru optymalnych metod rozwiązywania problemów matematycznych. Należy pracować nad tym, aby uczniowie dobrze rozumieli wprowadzane na zajęciach definicje i twierdzenia oraz potrafili je interpretować, także geometrycznie. Ułatwia to budowanie modelu matematycznego, zwłaszcza w przypadku zadań praktycznych i zadań z rachunku prawdopodobieństwa. Poziom merytoryczny odpowiedzi uczniów był bardzo zróżnicowany. Obok rozwiązań świadczących o wiedzy i umiejętności samodzielnego myślenia, zdarzały się odpowiedzi błędne i nielogiczne. Kolejny raz okazało się, że poważnym mankamentem była niedostateczna sprawność w przekształcaniu wyrażeń.

**Często zdający poprawnie analizowali warunki zadania, poprawnie zapisywali równania, ale błędy rachunkowe uniemożliwiały im rozwiązanie zadania lub prowadziły do niepoprawnych rozwiązań.**

Wprowadzenie obowiązkowego egzaminu maturalnego z matematyki poprzedzone było szeroką akcją informacyjną skierowaną do uczniów i nauczycieli. Ukazały się między innymi dwa przykładowe arkusze egzaminacyjne w *Informatorze maturalnym*, a kolejne były opublikowane na stronach internetowych CKE i OKE we wrześniu i listopadzie 2009 roku. Analiza rozwiązań zadań otwartych na poziomie podstawowym wskazuje, iż nie wszyscy maturzyści korzystali z przygotowanych dla nich materiałów pomocniczych. W pracy dydaktycznej z uczniami przygotowującymi się do egzaminu maturalnego w roku 2011 warto zwrócić uwagę na kształcenie takich podstawowych umiejętności, jak:

- strategie rozwiązywania zadań zamkniętych,
- tworzenie prostych modeli matematycznych do zadań praktycznych,
- rozumienie pojęć (a nie opieranie się w rozwiązaniu na znanych algorytmach),
- dobór optymalnych sposobów (strategii) rozwiązania problemów matematycznych,
- argumentowanie i rozumowanie w prostych sytuacjach algebraicznych i geometrycznych,
- czytelne zapisywanie toku myślenia,
- sprawne posługiwanie się *Zestawem wybranych wzorów matematycznych*.

Ważne jest, aby maturzyści uważnie czytali i analizowali treść zadań, a następnie udzielali zwięzłej i precyzyjnej odpowiedzi, zgodnej z przedstawionym poleceniem. Uczniowie przygotowujący się do egzaminu maturalnego z matematyki powinni korzystać między innymi z materiału ćwiczeniowego, jakim są arkusze egzaminacyjne umieszczone na stronach internetowych CKE i OKE, a przede wszystkim z *Informatora maturalnego z matematyki od 2010 roku*.