Spis treści

1 Struktura i forma egzaminu maturalnego z matematyki

W roku szkolnym 2009/2010 w całym kraju po raz kolejny został przeprowadzony egzamin maturalny dla absolwentów liceów ogólnokształcących (LO), liceów profilowanych (LP), techników (T), uzupełniających liceów ogólnokształcących (LU) i techników uzupełniających (TU).

Egzamin maturalny z matematyki jest egzaminem zewnętrznym i ma formę pisemną. Egzamin maturalny z matematyki jako przedmiot obowiązkowy był zdawany na poziomie podstawowym lub jako przedmiot dodatkowy na poziomie rozszerzonym. Egzamin na poziomie podstawowym trwał 170 minut, a na poziomie rozszerzonymi 180 minut i polegał na rozwiązaniu zadań egzaminacyjnych zawartych w jednym arkuszu egzaminacyjnym.

Maksymalna liczba punktów możliwych do uzyskania w obu arkuszach wynosi 50.

W trakcie egzaminu zdający mógł korzystać z zestawu wybranych wzorów matematycznych przygotowanego przez CKE i kalkulatora z podstawowymi działaniami.
Wyniki egzaminu zamieszczone na świadectwie dojrzałości wyrażone są w skali procentowej.

2 Opis arkuszy egzaminacyjnych ustalonych przez Centralną Komisję Egzaminacyjną na egzamin maturalny z matematyki w roku szkolnym 2009/2010

Zgodnie z koncepcją i strukturą egzaminu maturalnego z matematyki zdający egzamin w tym roku zarówno na poziomie podstawowym, jak i rozszerzonym mieli do rozwiązania zadania z jednego arkusza egzaminacyjnego.
Arkusze zostały tak skonstruowane, aby zbadać stopień opanowania umiejętności określonych w pięciu obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych:

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
III. Modelowanie matematyczne.
IV. Użycie i tworzenie strategii.
V. Rozumowanie i argumentacja.

Poziom trudności poszczególnych zadań był zróżnicowany i dostosowany do możliwości absolwentów szkół ponadgimnazjalnych. Tematyka zadań dotyczyła większości treści zawartych w podstawie programowej matematyki. Zadania egzaminacyjne zawarte w arkuszach pozwalały sprawdzić znajomość i rozumienie podstawowych pojęć, definicji i twierdzeń oraz stosowanie ich do rozwiązywania problemów matematycznych. Sprawdzały też umiejętność korzystania i przetwarzania podanych informacji oraz umiejętność zastosowania tej wiedzy w praktyce z zakresu wymagań egzaminacyjnych dla poziomu podstawowego. Zadania egzaminacyjne w arkuszu rozszerzonym w większym stopniu niż w arkuszu podstawowym sprawdzały umiejętność rozwiązywania problemów i podawania do nich opisu matematycznego w oparciu o treści obejmujące zakres wymagań egzaminacyjnych dla poziomu podstawowego i rozszerzonego, poprawnego interpretowania tekstu matematycznego, umiejętność argumentowania i prowadzenia rozumowania typu matematycznego i oceniania przydatności otrzymanych wyników.

ARKUSZ PODSTAWOWY

Arkusz podstawowy składał się z 34 zadań, w tym 25 zamkniętych (zdający wybierał odpowiedź spośród czterech propozycji), oraz 9 zadań otwartych (rozwiązanie i odpowiedź zdający musiał samodzielnie zapisać). Za każde poprawnie rozwiązane zadanie zamknięte zdający uzyskiwał 1 punkt, natomiast wśród zadań otwartych było 6 zadań dwupunktowych, 2 zadania czteropunktowe i jedno zadanie pięciopunktowe.

Zadania w arkuszu z poziomu podstawowego sprawdzały umiejętności opisane we wszystkich pięciu obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych. Badały one znajomość i rozumienie podstawowych pojęć matematycznych, definicji i twierdzeń oraz umiejętność posługiwania się tą wiedzą w praktyce. Sprawdzały także umiejętność formułowania opisu matematycznego danej sytuacji, doboru odpowiedniej strategii rozwiązania problemu oraz umiejętność analizowania i interpretowania problemów matematycznych. Tematyka zadań egzaminacyjnych obejmowała treści podstawy programowej. Umiejętności zostały zbadane na treściach wszystkich dziesięciu działów podstawy programowej.

ARKUSZ ROZSZERZONY

Arkusz dla poziomu rozszerzonego składał się z 11 zadań otwartych o zróżnicowanej punktacji. Wśród nich było 6 zadań czteropunktowych, 4 zadania pięciopunktowe i jedno zadanie sześciopunktowe.

Zadania w arkuszu dla poziomu rozszerzonego sprawdzały umiejętności opisane w trzech najwyższych obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych Zadania badały przede wszystkim umiejętność analizowania sytuacji problemowych i podawania do nich opisu matematycznego, strategii rozwiązania problemu, a także argumentowania i prowadzenia rozumowania matematycznego. Tematyka zadań obejmowała treści z podstawy programowej dla poziomu rozszerzonego.
programowej dla poziomu rozszerzonego.

3 Kartoteki arkuszy egzaminacyjnych z matematyki

W Tabeli 1. zamieszczono kartotekę arkusza podstawowego, w Tabeli 2. – kartotekę arkusza rozszerzonego. Kartoteki te zawierają informację o sprawdzanych czynnościach, przyporządkowany im numer standardu, numer treści ze standardu I, których znajomością powinien wykazać się zdający oraz numery zadań wraz z maksymalną liczbą punktów, które można było uzyskać za ich rozwiązanie.

Tabela 1. Kartoteka arkusza egzaminacyjnego – poziom podstawowy

Numer zadania	Badana umiejętność Zdający:	Standard wymagań egzaminacyjnych	Numer treści ze standardu	Typ zadania	Punktacja
1	stosuje interpretację geometryczną wartości bezwzględnej	INF, REP	1) f)	ZZ	1 pkt
2	wykonuje obliczenia procentowe	MOD	1) d)	ZZ	1 pkt
3	stosuje definicję potęgi o wykładniku zero	INF	1) g)	ZZ	1 pkt
4	oblicza sumę logarytmów	REP, STR	1) h)	ZZ	1 pkt
5	dodaje wielomiany	INF	2) c)	ZZ	1 pkt

6	rozwiązuje proste równanie wymierne prowadzące do równania liniowego	INF, REP	3) e)	ZZ	1 pkt
7	sprawdza, czy liczba należy do zbioru rozwiązań nierówności kwadratowej	INF, REP	3) a)	ZZ	1 pkt
8	odczytuje współrzędne wierzchołka paraboli z jej postaci kanonicznej	INF, REP	4) h)	ZZ	1 pkt
9	wykorzystuje interpretację współczynników we wzorze funkcji liniowej	REP	4) g)	ZZ	1 pkt
10	odczytuje własności funkcji z jej wykresu	REP	4) b)	ZZ	1 pkt
11	wyznacza wyraz ciągu arytmetycznego	INF, REP	5) a)	ZZ	1 pkt
12	oblicza iloraz ciągu geometrycznego	INF, REP	5) a)	ZZ	1 pkt
13	oblicza liczbę przekątnych wielokąta	INF, REP	7) c)	ZZ	1 pkt
14	stosuje związki między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego do obliczenia wartości wyrażenia	REP	6) c)	ZZ	1 pkt
15	oblicza długość boku kwadratu wpisanego w okrąg	INF, REP	7) c)	ZZ	1 pkt
16	oblicza wysokość trójkąta równoramiennego, stosując twierdzenie Pitagorasa	INF, REP	7) c)	ZZ	1 pkt
17	wykorzystuje własności figur podobnych do obliczenia długości odcinka	INF, REP	7) b)	ZZ	1 pkt
18	oblicza miarę kąta środkowego	INF	7) a)	ZZ	1 pkt
19	oblicza pole podanej figury	REP	7) c)	ZZ	1 pkt
20	wskazuje współczynnik kierunkowy prostej równoległej do danej prostej	INF, REP	8) c)	ZZ	1 pkt
21	wskazuje równanie okręgu o podanym promieniu	INF, REP	8) g)	ZZ	1 pkt
22	oblicza odległość dwóch punktów na płaszczyźnie	REP	8) e)	ZZ	1 pkt
23	oblicza pole powierzchni wielościanu	INF	9) b)	ZZ	1 pkt
24	oblicza liczbę krawędzi wielościanu	INF	9) b)	ZZ	1 pkt
25	oblicza średnią arytmetyczną	INF	10) a)	ZZ	1 pkt
26	rozwiązuje nierówność kwadratową	REP	3) a)	KO	2 pkt
27	rozwiązuje równanie wielomianowe metodą rozkładu na czynniki	INF, REP	3) d)	KO	2 pkt
28	przeprowadza dowód geometryczny	ROZ	7) b)	KO	2 pkt
29	oblicza wartość funkcji trygonometrycznej kąta ostrego, znając wartość innej funkcji trygonometrycznej tego kąta	REP, STR	6) d)	KO	2 pkt
30	przeprowadza dowód nierówności algebraicznej	ROZ	2) f)	KO	2 pkt

31	oblicza obwód figury, wykorzystując związki miarowe w trójkącie prostokątnym i równobocznym	INF, REP	7) c)	KO	2 pkt
32	oblicza objętość wielościanu	STR	9) b)	RO	4 pkt
33	oblicza prawdopodobieństwo zdarzenia, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa	MOD	10) d)	RO	4 pkt
34	rozwiązuje zadanie umieszczone w kontekście praktycznym, prowadzące do równania kwadratowego	MOD	3) b)	RO	5 pkt

Tabela 2. Kartoteka arkusza egzaminacyjnego – poziom rozszerzony

Numer zadania	Badana umiejętność Zdający:	Standard wymagań egzamina-cyjnych	Numer treści ze standardu	Typ zadania	Punktacja
1	rozwiązuje nierówność z wartością bezwzględną	REP, STR	3) e)R	RO	4 pkt
2	rozwiązuje równanie trygonometryczne	STR	6) e)R	RO	4 pkt
3	rozwiązuje zadanie w kontekście praktycznym prowadzące do badania funkcji kwadratowej	MOD, STR	4) l)	RO	4 pkt
4	stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian	STR	2) b)R	RO	4 pkt
5	wykorzystuje własności ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego do rozwiązania zadania	MOD	5)	RO	5 pkt
6	przeprowadza dyskusję dotyczącą rozwiązań równania kwadratowego z parametrem	STR	3) b)R	RO	5 pkt
7	rozwiązuje zadanie z geometrii analitycznej	STR	8) R	RO	6 pkt
8	przeprowadza dowód algebraiczny	ROZ	4) l)	RO	5 pkt
9	przeprowadza dowód geometryczny	ROZ	7) c)	RO	4 pkt
10	oblicza prawdopodobieństwo z wykorzystaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa	MOD, STR	10) R	RO	4 pkt
11	wyznacza objętość wielościanu z wykorzystaniem trygonometrii	STR	9) b)	RO	5 pkt

4 Wyniki egzaminu maturalnego z matematyki

W województwie kujawsko-pomorskim do egzaminu maturalnego z matematyki przystąpiło 18368 (3627-2009r) osób, z czego 2014 (1337-2009r) zdawało ją na poziomie rozszerzonym.

Wynik co najmniej 30% punktów za rozwiązanie zadań na poziomie podstawowym uzyskało 88,5%, a na poziomie rozszerzonym 50% przystępujących (58 osób osoby ogółem – z lat ubiegłych) do egzaminu z matematyki jako przedmiotu obowiązkowego.

W Tabeli 3. przedstawiono procent abiturientów z uwzględnieniem typu szkoły, którzy zdali egzamin maturalny z matematyki na poziomie podstawowym tj. uzyskali co najmniej 30% punktów i zdawali egzamin maturalny po raz pierwszy.

Zdawalność w sesjach 2005 – 2010.

Tabela 3. Porównanie zdawalności w sesjach 2005 - 2010

		woj. pomorskie					
		LO	**LP**	**T**	**LU**	**TU**	**Razem**
% osób, które zdały egzamin	**2005**	93	56	-	-	-	84
	2006	97	84	88	-	-	93
	2007	88	62	63	-	-	76
	2008	92	63	81	-	-	88
	2009	93	72	80	-	-	89
	2010	94,5%	72,7%	83,8%	49,2%	45,6%	88,5%

Zdawalność w liceach i technikach uzupełniających do 2009 roku miały małą wagę statystyczną ze względu na niewielką liczbę zdających.
Pojęcie ***zdawalność*** do roku 2006 dotyczyło osób, które uzyskały co najmniej 30% punktów możliwych do zdobycia z arkusza podstawowego, a latach 2007-2009 uzyskały 30% dla wybranego poziomu. Od roku 2010 dotyczy osób, które uzyskały co najmniej 30% punktów możliwych do zdobycia z arkusza podstawowego. Przy analizie tych wyników należy uwzględnić rozdzielenie poziomów.

4.1 Rozkłady wyników egzaminu w skali znormalizowanej

Skala ta pozwala porównać wyniki egzaminu z kilku kolejnych lat. Poza tym uczeń może zinterpretować swoje wyniki na tle całej populacji zdających i ocenić swoje realne szanse na kontynuowanie nauki.

Tabela 4. Znormalizowana skala dziewięciostopniowa staninowa

Normalizacja wyników egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie podstawowym na skali staninowej (egzamin zdawało 361 679 osób w kraju)				
Stanin (klasa wyniku)		**Nazwa stanina**	**Wynik (w %)**	**Komentarz**
Nr	**% ogólnych wyników**			
1	4%	**najniższy**	**0% - 16 %**	**4%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **96%** zdających ma wynik w wyższych klasach.
2	7%	**bardzo niski**	**18% - 26%**	**7%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **4%** zdających ma wynik w klasie niższej **89%** zdających ma wynik w wyższych klasach
3	12%	**niski**	**28% - 38%**	**12%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **11%** zdających ma wynik w klasach niższych **77%** zdających ma wynik w wyższych klasach
4	17%	**poniżej średniej**	**40% - 50%**	**17%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **23%** zdających ma wynik w klasach niższych **60%** zdających ma wynik w wyższych klasach
5	20%	**średni**	**52% - 66%**	**20%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **40%** zdających ma wynik w klasach niższych **40%** zdających ma wynik w wyższych klasach
6	17%	**powyżej średniej**	**68% - 78%**	**17%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **60%** zdających ma wynik w klasach niższych **23%** zdających ma wynik w wyższych klasach
7	12%	**wysoki**	**80% - 88%**	**12%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **77%** zdających ma wynik w klasach niższych **11%** zdających ma wynik w wyższych klasach
8	7%	**bardzo wysoki**	**90% - 94%**	**7%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **89%** zdających ma wynik w klasach niższych **4%** zdających ma wynik w wyższych klasach
9	4%	**najwyższy**	**96% - 100%**	**4%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **96%** zdających ma wynik w klasach niższych
Normalizacja wyników egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie rozszerzonym na skali staninowej (egzamin zdawało 54 235 osób w kraju)				
Stanin (klasa wyniku)		**Nazwa stanina**	**Wynik (w %)**	**Komentarz**
Nr	**% ogólnych wyników**			
1	4%	najniższy	**0% - 6 %**	**4%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **96%** zdających ma wynik w wyższych klasach.
2	7%	bardzo niski	**8% - 14%**	**7%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **4%** zdających ma wynik w klasie niższej **89%** zdających ma wynik w wyższych klasach
3	12%	niski	**16% - 26%**	**12%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **11%** zdających ma wynik w klasach niższych **77%** zdających ma wynik w wyższych klasach
4	17%	poniżej średniej	**28% - 42%**	**17%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **23%** zdających ma wynik w klasach niższych **60%** zdających ma wynik w wyższych klasach
5	20%	średni	**44% - 56%**	**20%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **40%** zdających ma wynik w klasach niższych **40%** zdających ma wynik w wyższych klasach
6	17%	powyżej średniej	**58% - 70%**	**17%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **60%** zdających ma wynik w klasach niższych **23%** zdających ma wynik w wyższych klasach
7	12%	wysoki	**72% - 82%**	**12%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **77%** zdających ma wynik w klasach niższych **11%** zdających ma wynik w wyższych klasach
8	7%	bardzo wysoki	**84% - 90%**	**7%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **89%** zdających ma wynik w klasach niższych **4%** zdających ma wynik w wyższych klasach
9	4%	najwyższy	**92% - 100%**	**4%** zdających ma wynik w tej klasie wyników **96%** zdających ma wynik w klasach niższych

4.2 Analiza statystyczna wyników arkusza podstawowego

Poniżej przedstawiono wartości wybranych wskaźników wykonania zadań, takie jak wskaźniki łatwości poszczególnych zadań i zestawu zadań z arkusza z poziomu podstawowego oraz łatwości zadań w poszczególnych obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych. Przedstawione dane dotyczą absolwentów z województwa pomorskiego.

4.2.1 Wskaźniki statystyczne arkusza podstawowego

Tabela 5. Wartości parametrów statystycznych wyników zdających egzamin maturalny z matematyki jako obowiązkowy na poziomie podstawowym

Parametr statystyczny	Zdający					
	LO	LP	T	LU	TU	Razem
Liczba zdających	11000	899	5847	454	168	18368
Liczba zdających, którzy uzyskali co najmniej 30% punktów i	10403	654	4902	224	77	16260
Wynik minimalny w punktach	0	0	0	0	4	0
Wynik maksymalny w punktach	50	48	50	45	36	50
Wynik średni w punktach	33,60	21,02	24,83	15,35	14,77	29,57
Wynik średni w %	67	42	50	31	30	59
Modalna w punktach	42,00	16,00	21,00	10,00	11,00	31,00
Mediana w punktach	35,00	20,00	24,00	14,00	13,50	30,00
Odchylenie standardowe w punktach	10,53	9,53	10,01	8,09	6,95	11,50
Odchylenie standardowe w %	21	19	20	16	14	23
Zdawalność w %	94,5	72,7	83,8	49,2	45,6	88,5

Analizie statystycznej poddano wyniki 18368 zdających egzamin maturalny z matematyki w maju 2010 roku (dla porównania w 2009r. 2290 osób). Statystyczny maturzysta uzyskał wynik 29,57 punktów, co stanowi 59% liczby punktów możliwych do uzyskania za rozwiązanie zadań arkusza z poziomu podstawowego. Rozstęp wyników wynosi 50 i wskazuje na bardzo duże zróżnicowanie umiejętności zdających. Wartość miary rozrzutu (odchylenie standardowe) - 11,50 - oznacza, że około 70% zdających uzyskało wyniki z przedziału 18-41 punktów, dla porównania w roku 2009 wartość miary rozrzutu wynosiła (odchylenie standardowe) – 11,27 (2008- 11,48) – co oznaczało, że około 70% zdających uzyskało wyniki z przedziału 15-37 punktów.

Powyższe dane wskazują, że uczniowie liceów ogólnokształcących są lepiej przygotowani do egzaminu maturalnego z matematyki niż uczniowie pozostałych typów szkół i wyniki średnie przez nich uzyskane w arkuszu z poziomu podstawowego są wyższe od wyników uzyskanych przez absolwentów pozostałych typów szkół. W arkuszu rozszerzonym różnice te są dużo większe.

4.2.2 Łatwość zadań w obszarach sprawdzanych treści

Tabela 6. **Analiza stopnia opanowania sprawdzanych treści poziomu podstawowego**

Lp.	Zakres treści	Numery zadań	Liczba punktów	Wskaźnik łatwości	Odchylenie standardowe
1	Liczby rzeczywiste	1,2,3,4	4	0,77	0,26
2	Wyrażenia algebraiczne	5,30	3	0,40	0,23
3	Równania i nierówności	6,7,26,27,34	11	0,60	0,32
4	Funkcje	8,9,10	3	0,71	0,31
5	Ciągi liczbowe	11,12	2	0,83	0,30
6	Trygonometria	14,29	3	0,65	0,39
7	Planimetria	13,15,16,17,18,19,28,31	10	0,50	0,23
8	Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej	20,21,22	3	0,76	0,30
9	Stereometria	23,24,32	6	0,57	0,35
10	Elementy statystyki opisowej; teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka	25,33	5	0,45	0,33

Powyższe wyniki wskazują, że uczniowie zdający egzamin na poziomie podstawowym rozwiązują zadania z poszczególnych działów na poziomie 50 i więcej procent. Niższe wskaźniki łatwości z takich działów jak: „Wyrażenia algebraiczne", „Elementy statystyki opisowej; teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka" są spowodowane licznymi błędami rachunkowymi. Najłatwiejsze są dla nich zadania z liczb rzeczywistych i trygonometrii. Wynika to z faktu, że zadania tego typu występowały na poprzednich egzaminach maturalnych, włącznie z egzaminem próbnym.

4.2.3 Łatwość zadań w obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych

Tabela 7. Wartości parametrów statystycznych zadań arkusza dla poziomu podstawowego w obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych

Obszar standardów	Średnia	Odchylenie standardowe
1. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	0,75	0,22
2. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	0,69	0,23
3. Modelowanie matematyczne.	0,44	0,34
4. Użycie i tworzenie strategii.	0,54	0,36
5. Rozumowanie i argumentacja.	0,11	0,22

Analiza łatwości zadań w poszczególnych obszarach standardów wykazuje, że najłatwiejsze okazało się rozwiązywanie zadań badających umiejętności opisane w standardzie I, w którym zdający wykorzystuje i przetwarza informacje. W dalszym ciągu najtrudniejszy jest standard V – rozumowanie i argumentacja – występujący w zadaniach na dowodzenie.

Udział punktów możliwych do uzyskania za każdy z tych obszarów przedstawia tabela 8.

Tabela 8. Przyporządkowanie zadań i punktów do obszarów standardów wymagań egzaminacyjnych.

Obszar standardów	Numer zadania w arkuszu		Liczba punktów	Waga
	Zadania zamknięte	Zadania otwarte		
1. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	3, 5, 6, 11, 12, 15, 16, 17, 18, 23, 24, 25	27, 31	16	32%
2. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1, 7, 8, 9, 10, 13,14, 19, 20, 21, 22	26	13	26%
3. Modelowanie matematyczne.	2	33, 34	10	20%
4. Użycie i tworzenie strategii.	4	29, 32	7	14%
5. Rozumowanie i argumentacja.	–	28, 30	4	8%

4.2.4 Łatwość zadań i rozkład ich wyników

Arkusz egzaminacyjny podstawowy był dla zdających umiarkowanie trudny. Bardzo trudne okazały się zadania na dowodzenie: 28 i 30.

Stopień wykonania zadań z arkusza podstawowego przedstawiono w Tabelach 9 i 10.

Tabela 9. Łatwość zadań arkusza podstawowego

Numery zadań	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Łatwość zadań	0,66	0,76	0,95	0,72	0,92	0,82	0,91	0,68	0,77	0,68	0,87
Łatwość zadań kraj	0,66	0,73	0,94	0,70	0,90	0,82	0,90	0,67	0,76	0,70	0,86

Numery zadań	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Łatwość zadań	0,78	0,48	0,75	0,64	0,86	0,51	0,90	0,54	0,75	0,85	0,66
Łatwość zadań kraj	0,78	0,51	0,73	0,64	0,86	0,52	0,90	0,55	0,75	0,84	0,65

Numery zadań	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
Łatwość zadań	0,84	0,70	0,94	0,63	0,63	0,07	0,60	0,15	0,46	0,47	0,33	0,46
Łatwość zadań kraj	0,83	0,70	0,93	0,59	0,60	0,08	0,59	0,16	0,46	0,48	0,34	0,45

Rysunek 1 Łatwość zadań arkusza podstawowego

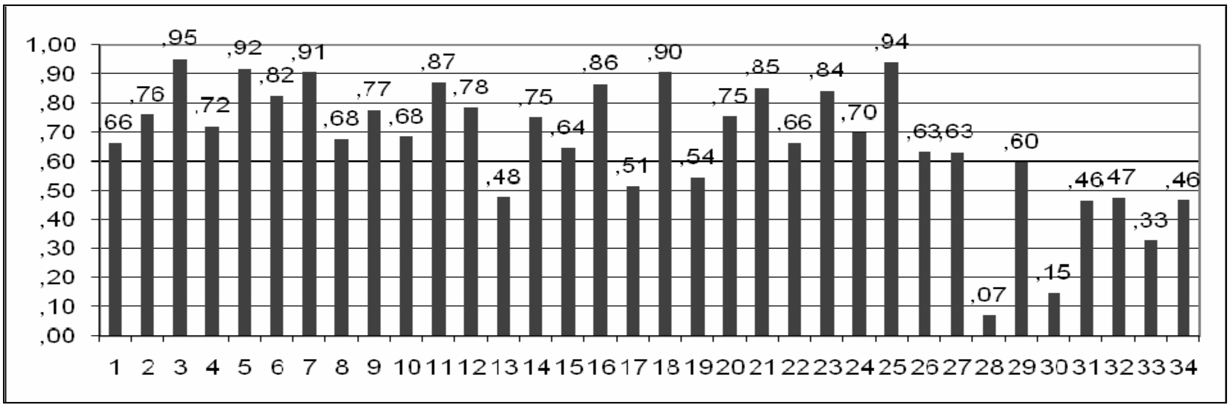


Tabela 10. Interpretacja wskaźnika łatwości zadań arkusza podstawowego

Stopień trudności	Wskaźnik łatwości	Numery zadań	Liczba zadań
Bardzo trudne	0,00-0,19	28, 30	2
Trudne	0,20-0,49	13, 31, 32, 33, 34	5
Umiarkowanie trudne	0,50-0,69	1, 8, 10, 15, 17, 19, 22, 26, 27, 29	10
Łatwe	0,70-0,89	2, 4, 6, 9, 11, 12, 14, 16, 20, 21, 23, 24,	12
Bardzo łatwe	0,90-1,00	3, 5, 7, 18, 25	5

W arkuszu dla poziomu podstawowego znalazły się zadania od bardzo trudnych po bardzo łatwe, co wskazuje na duże zróżnicowanie zadań. Spośród zadań najłatwiejsze dla zdających były zadania zamknięte: 3, 5, 7, 18, 25.

4.3 Analiza statystyczna wyników arkusza rozszerzonego

Poniżej przedstawiono wartości wybranych wskaźników wykonania zadań, takie jak np. wskaźnik łatwości poszczególnych zadań i zestawu zadań z arkusza rozszerzonego oraz łatwości zadań w poszczególnych obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych. Przedstawione dane dotyczą całej grupy abiturientów, którzy wybrali matematykę na poziomie rozszerzonym, zarówno jako przedmiot obowiązkowy (58 osób), jak i dodatkowy.

4.3.1 Wskaźniki statystyczne arkusza rozszerzonego

W Tabeli 11. przedstawiono wartości wybranych wskaźników statystycznych (wynik maksymalny, minimalny i średni wyrażone w punktach i procentach) uzyskane przez zdających za rozwiązanie zadań z arkusza rozszerzonego.

Tabela11. Wartości parametrów statystycznych wyników zdających egzamin maturalny z matematyki jako przedmiot dodatkowo wybrany na poziomie rozszerzonym

Parametr statystyczny	Zdający					
	LO	LP	T	LU	TU	Razem
Liczba zdających	1768	11	232	2	1	2014
Liczba zdających jako obowiązkowy	51	1	6	0	0	58
Liczba zdających,	26	0	3	0	0	29

którzy zdali						
Zdawalność w %	51	0	50	-	-	50
Wynik minimalny w punktach	0	0	0	2	5	0
Wynik maksymalny w punktach	50,00	22,00	46,00	7,00	5,00	50,00
Wynik średni w punktach	27,13	6,36	14,17	4,50	5,00	25,49
Wynik średni w %	54	13	28	9	10	51
Mediana	28,00	4,00	12,00	4,50	5,00	27,00
Modalna w punktach	38,00	,00	9,00	2,00	5,00	38,00
Modalna w %	76	00	18	4	10	76
Odchylenie standardowe w punktach	12,00	7,12	10,37	3,54	-	12,60
Odchylenie standardowe w %	24	14	21	7	-	25

Analizie statystycznej poddano wyniki 2014 zdających egzamin maturalny z matematyki w maju 2010 roku. Statystyczny maturzysta uzyskał wynik 25,49 punktów, co stanowi 51% liczby punktów możliwych do uzyskania za rozwiązanie zadań arkusza z poziomu rozszerzonego. Rozstęp wyników wynosi 50 punktów i wskazuje na bardzo duże zróżnicowanie umiejętności zdających. Wartość miary rozrzutu (odchylenie standardowe) – 12,6 – oznacza, że około 70% zdających uzyskało wyniki z przedziału 13-38 punktów (dla porównania , w roku 2009 wartość miary rozrzutu wynosiła (odchylenie standardowe) 9,37 – (13,06 - 2008r) – co oznaczało, że około 70% zdających uzyskało wyniki z przedziału 25-44 punktów).

4.3.2 Łatwość zadań w obszarach sprawdzanych treści wymagań egzaminacyjnych

Tabela 12. Analiza stopnia opanowania sprawdzanych treści poziomu rozszerzonego

Lp.	Zakres treści	Numery zadań	Liczba punktów	Wskaźnik łatwości	Odchylenie standardowe
1.	Liczby rzeczywiste				
2.	Wyrażenia algebraiczne	4	4	0,71	0,36
3.	Równania i nierówności	1,6	9	0,60	0,37
4.	Funkcje	3,8	9	0,33	0,36
5.	Ciągi liczbowe	5	5	0,83	0,29
6.	Trygonometria	2	4	0,70	0,36
7.	Planimetria	9	4	0,61	0,39
8.	Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej	7	6	0,42	0,38
9.	Stereometria	11	5	0,23	0,28
10.	Elementy statystyki opisowej; teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka	10	4	0,30	0,25

Powyższe wyniki wskazują, że dla zdających najtrudniejszymi działami matematyki są: „Stereometria” (23%) i „Elementy statystyki opisowej; teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka” (30%).

4.3.3 Łatwość zadań w obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych

Tabela 13 Wartości parametrów statystycznych zadań arkusza dla poziomu rozszerzonego w obszarach standardów wymagań egzaminacyjnych

Obszar standardów	Średnia	Odchylenie standardowe
3. Modelowanie matematyczne.	0,59	0,22
4. Użycie i tworzenie strategii.	0,51	0,28
5. Rozumowanie i argumentacja.	0,43	0,32

Analiza łatwości zadań w poszczególnych obszarach standardów wykazuje, że najtrudniejszym okazało się rozwiązywanie zadań badających umiejętności opisane w standardzie V dla poziomu rozszerzonego (rozumowanie i argumentacja).

Udział punktów możliwych do uzyskania za każdy z tych obszarów przedstawia Tabela 14.

Tabela 14. Przyporządkowanie zadań i punktów do obszarów standardów wymagań egzaminacyjnych.

Obszar standardów	Numer zadania w arkuszu	Liczba punktów	Waga
3. Modelowanie matematyczne.	5, 10	9	18%
4. Użycie i tworzenie strategii.	1, 2, 3, 4, 6, 7, 11	32	64%
5. Rozumowanie i argumentacja.	8, 9	9	18%

4.3.4 Łatwość zadań i rozkład ich wyników

Arkusz egzaminacyjny rozszerzony był dla zdających trudny.

Najtrudniejsze okazały się zadania:

- 8. – przeprowadzenie dowodu algebraicznego,
- 10. – obliczenie objętości wielościanu z wykorzystaniem trygonometrii,
- 11. – obliczanie prawdopodobieństwa z wykorzystaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa.

Najłatwiejsze okazały się zadania:

- 2. – rozwiązanie równania trygonometrycznego,
- 5. – obliczanie wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego.

Stopień wykonania zadań z arkusza rozszerzonego przedstawiono w Tabelach 15. i 16.

Tabela15. Łatwość zadań arkusza rozszerzonego

Numery zadań	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Łatwość zadań	0,59	0,70	0,39	0,71	0,83	0,61	0,42	0,28	0,61	0,30	0,23
Łatwość zadań - kraj	0,59	0,71	0,34	0,71	0,79	0,61	0,40	0,25	0,57	0,29	0,23

Rysunek 2 Łatwość zadań arkusza rozszerzonego

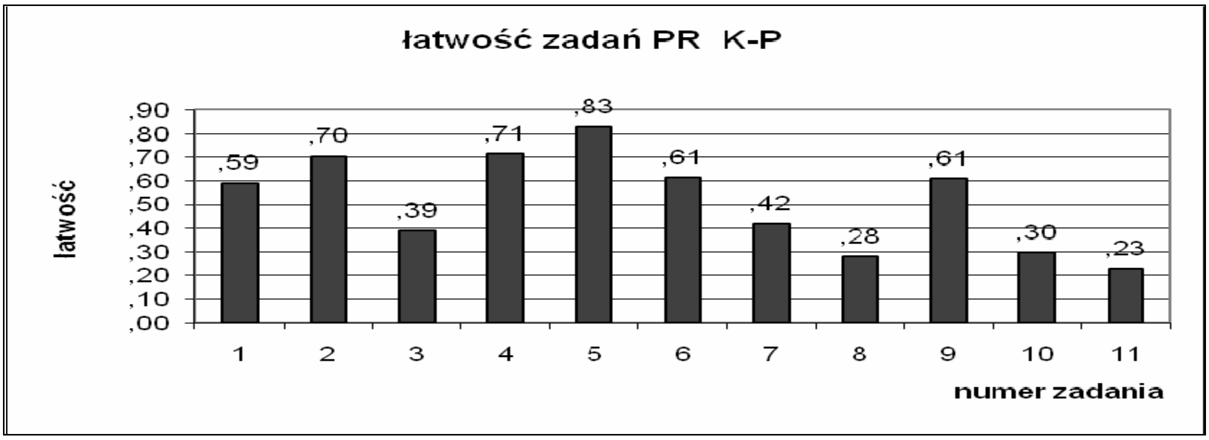


Tabela 16. Interpretacja wskaźnika łatwości zadań arkusza rozszerzonego

Stopień trudności	Wskaźnik łatwości	Numery zadań	Liczba zadań
Bardzo trudne	0,00-0,19	–	-
Trudne	0,20-0,49	3, 7, 8,10, 11	5
Umiarkowanie trudne	0,50-0,69	1, 6, 9	3
Łatwe	0,70-0,89	2, 4, 5	3
Bardzo łatwe	0,90-1,00	–	-

Spośród zadań umieszczonych w arkuszu dla poziomu rozszerzonego pięć było trudnych i trzy łatwe. W zestawie nie wystąpiły zadania bardzo łatwe i bardzo trudne.

4.4 Analiza jakościowa zadań egzaminacyjnych

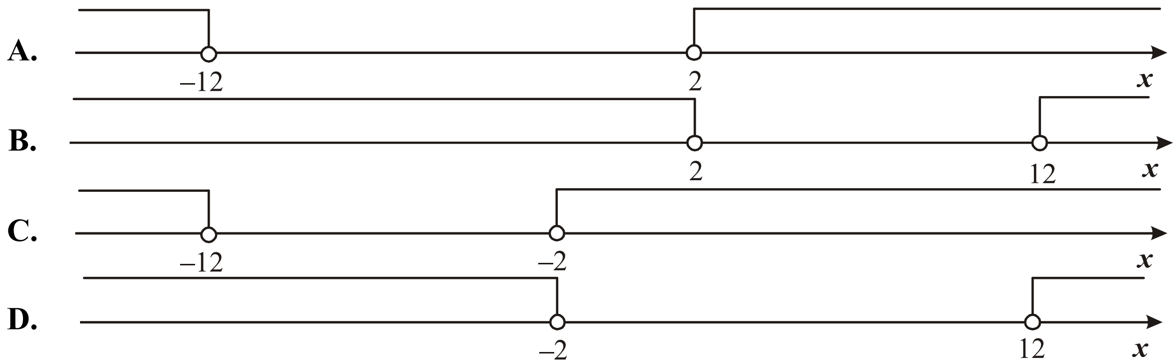
Wskaźniki łatwości zadań w województwie są porównywalne z krajowymi i typowe błędy w rozwiązaniach były analogiczne jak w skali kraju.

Analiza jakościowa poszczególnych zadań wykazuje, że zadania egzaminacyjne dobrze ilustrują standardy wymagań egzaminacyjnych.

ARKUSZ EGZAMINACYJNY – POZIOM PODSTAWOWY

Zadanie 1. *(1 pkt)*

Wskaż rysunek, na którym jest przedstawiony zbiór rozwiązań nierówności $|x+7|>5$.



Sprawdzane umiejętności Wykorzystanie interpretacji geometrycznej wartości bezwzględnej do wskazania zbioru rozwiązań nierówności typu $|x-a|>b$ (standard II).	
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	0,66
Poprawna odpowiedź: C.	

Zadanie 2. ***(1 pkt)***
Spodnie po obniżce ceny o 30% kosztują 126 zł. Ile kosztowały spodnie przed obniżką?

A. 163,80 zł **B.** 180 zł **C.** 294 zł **D.** 420 zł

Sprawdzane umiejętności Zastosowanie obliczeń procentowych w sytuacji praktycznej (standard III).	
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	0,76
Poprawna odpowiedź: B.	

Zadanie 3. ***(1 pkt)***
Liczba $\left(\dfrac{2^{-2}\cdot 3^{-1}}{2^{-1}\cdot 3^{-2}}\right)^0$ jest równa

A. 1 **B.** 4 **C.** 9 **D.** 36

Sprawdzane umiejętności Zastosowanie definicji potęgi o wykładniku zero (standard I).	
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	0,95
Poprawna odpowiedź: A. .	

Zadanie 4. ***(1 pkt)***
Liczba $\log_4 8+\log_4 2$ jest równa

A. 1 **B.** 2 **C.** $\log_4 6$ **D.** $\log_4 10$

Sprawdzane umiejętności Obliczenie sumy logarytmów (standard IV).	
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	0,72
Poprawna odpowiedź: B.	

Zadanie 5. ***(1 pkt)***

Dane są wielomiany $W(x) = -2x^3 + 5x^2 - 3$ oraz $P(x) = 2x^3 + 12x$. Wielomian $W(x) + P(x)$ jest równy

A. $5x^2 + 12x - 3$	**C.** $4x^6 + 5x^2 + 12x - 3$
B. $4x^3 + 5x^2 + 12x - 3$	**D.** $4x^3 + 12x^2 - 3$

Sprawdzane umiejętności Dodawanie wielomianów (standard I).	
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	0,92
Poprawna odpowiedź: A.	

Zadanie 6. ***(1 pkt)***

Rozwiązaniem równania $\frac{3x-1}{7x+1} = \frac{2}{5}$ jest

A. 1 **B.** $\frac{7}{3}$ **C.** $\frac{4}{7}$ **D.** 7

Sprawdzane umiejętności Sprawdzenie, czy liczba jest rozwiązaniem równania (standard I).	
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	0,82
Poprawna odpowiedź: D.	

Zadanie 7. ***(1 pkt)***

Do zbioru rozwiązań nierówności $(x-2)(x+3) < 0$ należy liczba

A. 9 **B.** 7 **C.** 4 **D.** 1

Sprawdzane umiejętności Sprawdzenie, czy liczba należy do zbioru rozwiązań nierówności kwadratowej (standard I).	
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	0,91
Poprawna odpowiedź: D.	

Zadanie 8. ***(1 pkt)***

Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = -3x^2 + 3$ jest parabola o wierzchołku w punkcie

A. $(3,0)$ **B.** $(0,3)$ **C.** $(-3,0)$ **D.** $(0,-3)$

Sprawdzane umiejętności Odczytanie z postaci kanonicznej funkcji kwadratowej współrzędnych wierzchołka paraboli (standard II).	
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	0,68
Poprawna odpowiedź: B.	

Zadanie 9. ***(1 pkt)***

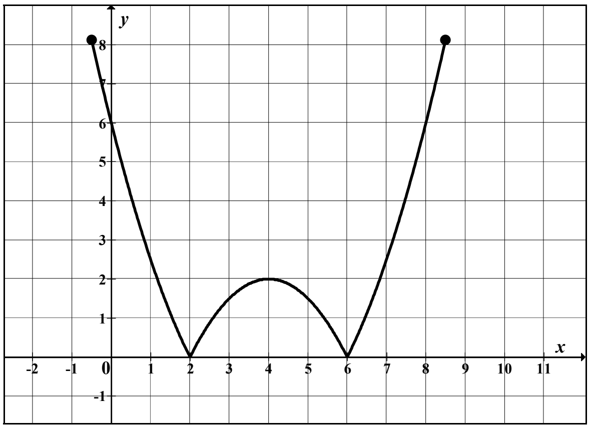
Prosta o równaniu $y = -2x + (3m+3)$ przecina w układzie współrzędnych oś Oy w punkcie $(0,2)$. Wtedy

A. $m=-\frac{2}{3}$ **B.** $m=-\frac{1}{3}$ **C.** $m=\frac{1}{3}$ **D.** $m=\frac{5}{3}$

Sprawdzane umiejętności Wykorzystanie interpretacji współczynników we wzorze funkcji liniowej (standard II).	
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	0,77
Poprawna odpowiedź: B.	

Zadanie 10. ***(1 pkt)***

Na rysunku jest przedstawiony wykres funkcji $y=f(x)$.



Które równanie ma dokładnie trzy rozwiązania?

A. $f(x)=0$ **B.** $f(x)=1$ **C.** $f(x)=2$ **D.** $f(x)=3$

Sprawdzane umiejętności Odczytywanie własności funkcji z jej wykresu (standard II).	
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	0,68
Poprawna odpowiedź: C.	

Zadanie 11. ***(1 pkt)***

W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są: $a_3=13$ i $a_5=39$. Wtedy wyraz a_1 jest równy

A. 13 **B.** 0 **C.** -13 **D.** -26

Sprawdzane umiejętności Wyznaczanie wyrazów ciągu arytmetycznego (standard I).	
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	0,87
Poprawna odpowiedź: C.	

Zadanie 12. ***(1 pkt)***

W ciągu geometrycznym (a_n) dane są: $a_1=3$ i $a_4=24$. Iloraz tego ciągu jest równy

A. 8 **B.** 2 **C.** $\frac{1}{8}$ **D.** $-\frac{1}{2}$

Sprawdzane umiejętności Obliczanie ilorazu ciągu geometrycznego (standard I).	
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	0,78
Poprawna odpowiedź: B.	

Zadanie 13. ***(1 pkt)***
Liczba przekątnych siedmiokąta foremnego jest równa

A. 7 **B.** 14 **C.** 21 **D.** 28

Sprawdzane umiejętności Obliczenie liczby przekątnych wielokąta (standard II).	
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	0,48
Poprawna odpowiedź: B.	

Zadanie 14. ***(1 pkt)***

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{3}{4}$. Wartość wyrażenia $2 - \cos^2\alpha$ jest równa

A. $\frac{25}{16}$ **B.** $\frac{3}{2}$ **C.** $\frac{17}{16}$ **D.** $\frac{31}{16}$

Sprawdzane umiejętności Zastosowanie związków między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego do obliczenia wartości wyrażenia (standard II).	
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	0,75
Poprawna odpowiedź: A.	

Zadanie 15. ***(1 pkt)***
Okrąg opisany na kwadracie ma promień 4. Długość boku tego kwadratu jest równa

A. $4\sqrt{2}$ **B.** $2\sqrt{2}$ **C.** 8 **D.** 4

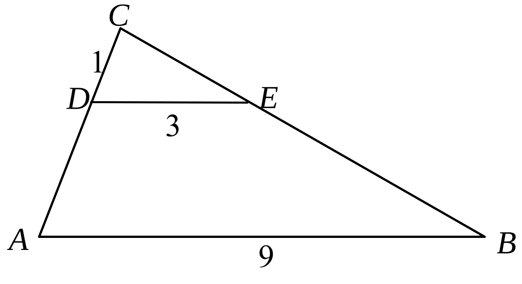
Sprawdzane umiejętności Obliczenie długość boku kwadratu wpisanego w okrąg (standard I).	
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	0,64
Poprawna odpowiedź: A.	

Zadanie 16. ***(1 pkt)***
Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 6, a ramię ma długość 5. Wysokość opuszczona na podstawę ma długość

A. 3 **B.** 4 **C.** $\sqrt{34}$ **D.** $\sqrt{61}$

Sprawdzane umiejętności Zastosowanie twierdzenie Pitagorasa do obliczenia wysokość trójkąta równoramiennego (standard I).	
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	0,86
Poprawna odpowiedź: B.	

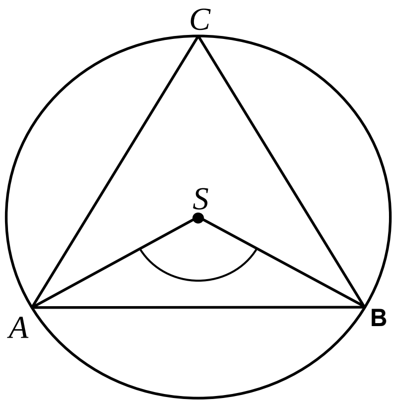
Zadanie 17. ***(1 pkt)***
Odcinki *AB* i *DE* są równoległe. Długości odcinków *CD*, *DE* i *AB* są odpowiednio równe 1, 3 i 9. Długość odcinka *AD* jest równa



A. 2 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 6

Sprawdzane umiejętności Wykorzystanie własności figur podobnych do obliczenia długości odcinka (standard I).	
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	0,51
Poprawna odpowiedź: A.	

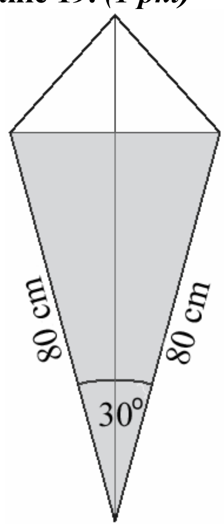
Zadanie 18. ***(1 pkt)***
Punkty *A*, *B*, *C* leżące na okręgu o środku *S* są wierzchołkami trójkąta równobocznego. Miara zaznaczonego na rysunku kąta środkowego *ASB* jest równa



A. 120° **B.** 90° **C.** 60° **D.** 30°

Sprawdzane umiejętności Obliczenie miary kąta środkowego (standard I).	
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	0,91
Poprawna odpowiedź: A.	

Zadanie 19. ***(1 pkt)***



Latawiec ma wymiary podane na rysunku. Powierzchnia zacieniowanego trójkąta jest równa

A. 3200 cm^2

B. 6400 cm^2

C. 1600 cm^2

D. 800 cm^2

Sprawdzane umiejętności Obliczenie pole trójkąta (standard II).	
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	0,54
Poprawna odpowiedź: C.	

Zadanie 20. ***(1 pkt)***
Współczynnik kierunkowy prostej równoległej do prostej o równaniu $y=-3x+5$ jest równy:

A. $-\frac{1}{3}$ B. -3 C. $\frac{1}{3}$ D. 3

Sprawdzane umiejętności Wskazanie współczynnika kierunkowego prostej równoległej do danej prostej (standard II).	
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	0,75
Poprawna odpowiedź: B.	

Zadanie 21. ***(1 pkt)***
Wskaż równanie okręgu o promieniu 6.

A. $x^2+y^2=3$ **B.** $x^2+y^2=6$ **C.** $x^2+y^2=12$ **D.** $x^2+y^2=36$

Sprawdzane umiejętności Wskazanie równanie okręgu o podanym promieniu (standard II).	
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	0,85
Poprawna odpowiedź: D.	

Zadanie 22. ***(1 pkt)***
Punkty $A=(-5,2)$ i $B=(3,-2)$ są wierzchołkami trójkąta równobocznego *ABC*. Obwód tego trójkąta jest równy

A. 30 **B.** $4\sqrt{5}$ **C.** $12\sqrt{5}$ **D.** 36

Sprawdzane umiejętności Obliczenie odległości dwóch punktów na płaszczyźnie (standard II).	
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	0,66
Poprawna odpowiedź: C.	

Zadanie 23. ***(1 pkt)***
Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu o wymiarach $5\times3\times4$ jest równe

A. 94 **B.** 60 **C.** 47 **D.** 20

Sprawdzane umiejętności Obliczenie pole powierzchni prostopadłościanu (standard I).	
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	0,84
Poprawna odpowiedź: A.	

Zadanie 24. ***(1 pkt)***
Ostrosłup ma 18 wierzchołków. Liczba wszystkich krawędzi tego ostrosłupa jest równa

A. 11 **B.** 18 **C.** 27 **D.** 34

Sprawdzane umiejętności Obliczenie liczby krawędzi ostrosłupa (standard I).	
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	0,70
Poprawna odpowiedź: D.	

Zadanie 25. ***(1 pkt)***

Średnia arytmetyczna dziesięciu liczb x, 3, 1, 4, 1, 5, 1, 4, 1, 5 jest równa 3. Wtedy

A. $x = 2$ **B.** $x = 3$ **C.** $x = 4$ **D.** $x = 5$

Sprawdzane umiejętności Obliczenie średniej arytmetycznej (standard I).	
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	0,94
Poprawna odpowiedź: D.	

Zadanie 26. ***(2 pkt)***

Rozwiąż nierówność $x^2 - x - 2 \le 0$.

Sprawdzane umiejętności
Rozwiązywanie nierówności kwadratowej (standard II).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	0,63

Przydział punktów za zadanie

Zdający otrzymuje ....1 pkt

- gdy wyznaczy pierwiastki trójmianu kwadratowego lub zapisze trójmian w postaci iloczynowej i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

albo

- gdy doprowadzi nierówność do postaci $\left|x - \frac{1}{2}\right| \le \frac{3}{2}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

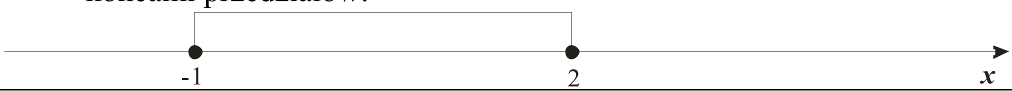
Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy:

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $-1 \le x \le 2$ lub $\langle -1, 2\rangle$ lub $x \in \langle -1, 2\rangle$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów:



Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:
Obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego

$$x_1 = \frac{1-3}{2} = -1 \qquad x_2 = \frac{1+3}{2} = 2.$$

Rysujemy fragment wykresu funkcji kwadratowej z zaznaczonymi miejscami zerowymi i odczytujemy rozwiązanie nierówności: $x \in \langle -1, 2\rangle$.

Komentarz:
Zadanie okazało się dla ogółu zdających umiarkowanie trudne.
Badało elementarną dla ucznia szkoły ponadgimnazjalnej umiejętność: rozwiązywanie

nierówności kwadratowej. Mimo iż ten typ zadania pojawił się na próbnej maturze (a także w arkuszach wcześniej publikowanych na stronie internetowej CKE i OKE), to zdający nadal popełniali błędy:

- obliczając wyróżnik trójmianu kwadratowego, np. $\Delta = -1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 7$,
- podając jego pierwiastki, np. $x_1 = \frac{-1-3}{2} = -2$, $x_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$,

lub

- zapisując zbiór rozwiązań nierówności kwadratowej, np. $x \in (-\infty, -1\rangle \cup \langle 2, +\infty)$ albo $x \in (-1, 2)$, albo podawali pierwiastki jako zbiór rozwiązań nierówności kwadratowej.

Pojawiały się również rozwiązania świadczące o braku podstawowych wiadomości i umiejętności nie tylko z zakresu funkcji kwadratowej, np.

$x^2 - x - 2 \le 0$

$x^2 - x \le 2$

$x \le 2$.

Zadanie 27. ***(2 pkt)***

Rozwiąż równanie $x^3 - 7x^2 - 4x + 28 = 0$.

Sprawdzane umiejętności

Rozwiązywanie równania wielomianowego metodą rozkładu na czynniki (standard I).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	0,63

Przydział punktów za zadanie

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy:

- pogrupuje wyrazy do postaci, z której łatwo można przejść do postaci iloczynowej, np.: $x(x^2-4) - 7(x^2-4) = 0$ lub $x^2(x-7) - 4(x-7) = 0$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd

albo

- podzieli wielomian $x^3 - 7x^2 - 4x + 28$ przez dwumian $(x-2)$ (albo $(x+2)$ albo $(x-7)$) i otrzyma poprawny iloraz i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd

albo

- podzieli wielomian $x^3 - 7x^2 - 4x + 28$ przez trójmian np. $(x-2)(x-7)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy wyznaczy bezbłędnie wszystkie rozwiązania równania: $x = 7$ lub $x = -2$ lub $x = 2$.

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:

Przedstawiamy lewą stronę równania w postaci iloczynowej, stosując metodę grupowania wyrazów: $x^2(x-7) - 4(x-7) = (x^2-4)(x-7)$,

a następnie rozwiązujemy równanie:

$(x-7)(x^2-4) = 0$

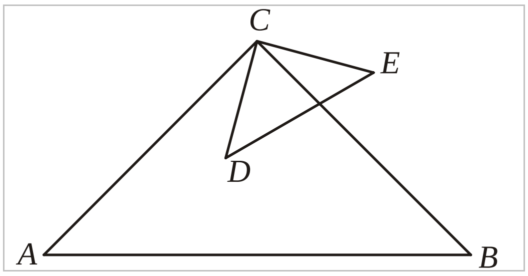
$(x-2)(x+2)(x-7) = 0$

Stąd $x = 7$ lub $x = -2$ lub $x = 2$.

Komentarz:

Zadanie okazało się dla ogółu zdających umiarkowanie trudne i jednocześnie było dla nich najłatwiejszym zadaniem otwartym w tym arkuszu.
Rozwiązywanie równania wielomianowego było kolejną z umiejętności badanych na egzaminie maturalnym także w poprzednich latach. Najczęściej popełniane błędy w tym zadaniu były wynikiem:
- niepoprawnego grupowania wyrazów, np. $x^2(x-7)-4(x+7)=0$,
- niepoprawnego grupowania wyrazów, np. $x^2(x-7)\quad 4(x+7)=0$ (pomijanie znaku działania),
- niewłaściwego rozkładu na czynniki, np. $x(x^2-7x-4+28)=0$,
- niewłaściwego grupowania $x(x^2-7x-4)=-28$ i rozwiązywania równania $x^2-7x-4=0$, obliczania Δ i pierwiastków równania,
- niepoprawnego rozwiązania równania kwadratowego, np. $x^2-4=0$: $x=2$.

Zadanie 28. (2 pkt)
Trójkąty prostokątne równoramienne ABC i CDE są położone tak, jak na poniższym rysunku (w obu trójkątach kąt przy wierzchołku C jest prosty). Wykaż, że $|AD|=|BE|$.



Sprawdzane umiejętności
Przeprowadzenie dowodu geometrycznego (standard V).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	0,07

Przydział punktów za zadanie

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy
- napisze, że trójkąty *ACD* i *BCE* są przystające i wyprowadzi stąd wniosek, że $|AD|=|BE|$

albo
- zapisze, że $|AC|=|BC|$, $|CD|=|CE|$ i $\sphericalangle ACD=\sphericalangle BCE$

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy uzasadni, że trójkąty *ACD* i *BCE* są przystające i wyprowadzi stąd wniosek, że $|AD|=|BE|$.

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:
Dorysowujemy odcinki *AD* i *BE*.
Trójkąty *ACD* i *BCE* są przystające na podstawie cechy *bkb*:
- $|AC|=|BC|$, bo trójkąt *ABC* jest równoramienny
- $|CD|=|CE|$, bo trójkąt *CDE* jest równoramienny

- $|\sphericalangle ACD| = 90^\circ - |\sphericalangle DCB| = |\sphericalangle BCE|$.

Zatem $|AD| = |BE|$.

Komentarz:
Zadanie okazało się dla ogółu zdających bardzo trudne i jednocześnie było dla nich najtrudniejszym zadaniem w tym arkuszu.
Ponad 28% maturzystów nie podjęło próby rozwiązania tego zadania, chociaż problem, z którym mieli się uporać, był typowy. Rozwiązywanie zadań z geometrii płaskiej jest dla maturzystów w dalszym ciągu trudne. Często zdający błędnie zakładali współliniowość punktów *A*, *D*, *E* lub korzystali z tezy zadania, zakładając przystawanie trójkątów *ACD* i *BCE* na podstawie cechy *bbb*. W wielu pracach zdający uzasadniali równość odcinków *AD* i *BE*, odwołując się do podobieństwa (bez podania uzasadnienia), a nie przystawania trójkątów, albo powoływali się na cechę przystawania *bkb*, bez uzasadnienia równości kątów *ACD* i *BCE*. Pojawiło się dużo rozwiązań błędnych, w których zdający próbowali wykorzystać równość wektorów i działania na wektorach.

Zadanie 29. ***(2 pkt)***

Kąt α jest ostry i $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{5}{12}$. Oblicz $\cos\alpha$.

Sprawdzane umiejętności
Obliczenie wartości jednej funkcji trygonometrycznej kąta ostrego z wykorzystaniem wartości innej funkcji trygonometrycznej tego kąta (standard IV).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	0,60

Przydział punktów za zadanie

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy:

- przekształci dane wyrażenie do postaci wyrażenia zawierającego tylko $\cos\alpha$ lub tylko $\sin\alpha$ i wykorzysta „jedynkę trygonometryczną”, np.
  $\sin\alpha = \frac{5}{12}\cos\alpha$, $\frac{25}{144}\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd

albo

- obliczy długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 12 i 5 (lub ich wielokrotności) z błędem rachunkowym i zapisze $\cos\alpha$

albo

- narysuje trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 12 i 5 (lub ich wielokrotności), obliczy długość przeciwprostokątnej i zaznaczy w tym trójkącie poprawnie kąt α

albo

- odczyta z tablic przybliżoną wartość kąta α: $\alpha \approx 22^\circ$ (akceptujemy wynik $\alpha \approx 23^\circ$) i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy

Zdający otrzymuje ....2 pkt

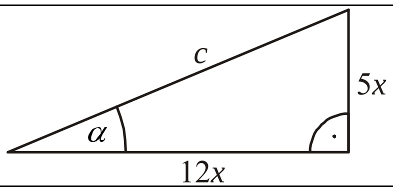
gdy:

- obliczy wartość $\cos\alpha$: $\cos\alpha = \frac{12}{13}$

albo

- obliczy przybliżoną wartość $\cos\alpha$: $\cos 22^\circ \approx 0,9272$ lub $\cos 23^\circ \approx 0,9205$

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:



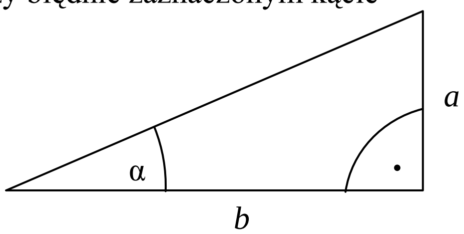
$$c^2 = (12x)^2 + (5x)^2$$
$$c = 13x$$
$$\cos\alpha = \frac{12x}{13x} = \frac{12}{13}$$

Komentarz:
Zadanie okazało się dla ogółu zdających umiarkowanie trudne, choć podobne wystąpiło na próbnym egzaminie maturalnym w listopadzie 2009r.
Znajomość definicji funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym jest elementarną umiejętnością z zakresu trygonometrii. Mimo to wciąż wielu zdających ma problemy z prawidłowym stosowaniem definicji i twierdzeń dotyczących funkcji trygonometrycznych. Stąd na przykład rozwiązania:

- $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{5}{12} \Rightarrow \sin\alpha = 5$ i $\cos\alpha = 12$

albo

- przy błędnie zaznaczonym kącie



$$a = 12$$
$$b = 5$$
$$c = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$$
$$\cos\alpha = \frac{a}{c} = \frac{12}{13}$$

Zdający, którzy do rozwiązania zadania używali jedynkę trygonometryczną, popełniali bardzo dużo błędów przy przekształcaniu równań. Nie wykazali się umiejętnością rozwiązania układu

$$\begin{cases} \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{5}{12} \\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases}$$

Błędnie wyznaczali $\sin\alpha$ lub $\cos\alpha$.
W tym zadaniu zdający najczęściej zaskakiwali brakiem sprawności w wykonywaniu podstawowych działań arytmetycznych, błędami popełnianymi w trakcie przekształceń algebraicznych i niepoprawnym stosowaniem twierdzenia Pitagorasa.

Zadanie 30. ***(2 pkt)***

Wykaż, że jeśli $a > 0$, to $\frac{a^2+1}{a+1} \geq \frac{a+1}{2}$.

Sprawdzane umiejętności	
Przeprowadzenie dowodu nierówności algebraicznej (standard V).	
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	0,15

Przydział punktów za zadanie

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy:

- otrzyma nierówność równoważną $a^2 - 2a + 1 \geq 0$ lub $\dfrac{a^2 - 2a + 1}{2(a+1)} \geq 0$ i na tym poprzestanie lub w dalszej części dowodu popełni błąd

albo

- stosując metodę dowodu nie wprost otrzyma nierówność $(a-1)^2 < 0$ i nie zapisze żadnych wniosków lub zapisze błędne wnioski

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy

- zapisze nierówność $a^2 - 2a + 1 \geq 0$ i uzasadni, że wszystkie liczby dodatnie a spełniają tę nierówność

albo

- zapisze nierówność $\dfrac{a^2 - 2a + 1}{2(a+1)} \geq 0$ i uzasadni, że wszystkie liczby dodatnie a spełniają tę nierówność

albo

- stosując metodę dowodu nie wprost otrzyma nierówność $(a-1)^2 < 0$ i zapisze, że otrzymana nierówność nie zachodzi dla żadnej liczby rzeczywistej a.

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:

Przekształcamy nierówność w sposób równoważny:

$$\frac{a^2+1}{a+1} \geq \frac{a+1}{2}$$

$$2\left(a^2+1\right) \geq (a+1)^2$$

$$2a^2 + 2 \geq a^2 + 2a + 1$$

$$a^2 - 2a + 1 \geq 0$$

$(a-1)^2 \geq 0$ co kończy dowód.

Komentarz:

Zadanie okazało się dla ogółu zdających bardzo trudne.

Zadania typu „wykaż” z reguły budzą obawy zdających, tak było również w tym przypadku. Ponad 16% maturzystów nie podjęło próby rozwiązania tego zadania.

Najczęściej popełnianym przez zdających błędem było dowodzenie prawdziwości twierdzenia dla kilku wybranych liczb całkowitych i wnioskowanie na tej podstawie o jego prawdziwości dla wszystkich liczb dodatnich. Pojawiały się też błędy związane z niepoprawnymi przekształceniami algebraicznymi, np. $\dfrac{2a^2 + 1 - a^2 - a - a + 1}{2(a+1)} \geq 0$, a także błędy wynikające z niezrozumienia, kiedy trójmian kwadratowy jest nieujemny, np.

$$a^2 - 2a + 1 \geq 0$$

$$\Delta = 4 - 4 = 0$$

$$a = \frac{2}{2} = 1 > 0 .$$

Zadanie 31. ***(2 pkt)***
W trapezie prostokątnym krótsza przekątna dzieli go na trójkąt prostokątny i trójkąt równoboczny. Dłuższa podstawa trapezu jest równa 6. Oblicz obwód tego trapezu.

Sprawdzane umiejętności
Obliczenie obwodu trapezu z wykorzystaniem związków miarowych w trójkącie prostokątnym i równobocznym (standard I).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	0,46

Przydział punktów za zadanie

Zdający otrzymuje ....1 pkt

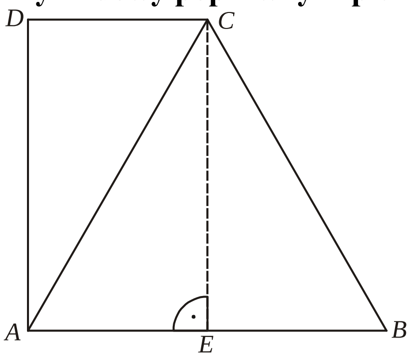
gdy
- prawidłowo podzieli trapez na trójkąty i poprawnie obliczy długość krótszej podstawy trapezu ($|DC| = 3$) i na tym zakończy lub popełni błędy rachunkowe przy obliczaniu obwodu trapezu

albo
- prawidłowo podzieli trapez na trójkąty i poprawnie obliczy wysokość trapezu ($h = 3\sqrt{3}$) i na tym zakończy lub popełni błędy rachunkowe przy obliczaniu obwodu trapezu

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy obliczy poprawnie obwód trapezu: $15 + 3\sqrt{3}$.

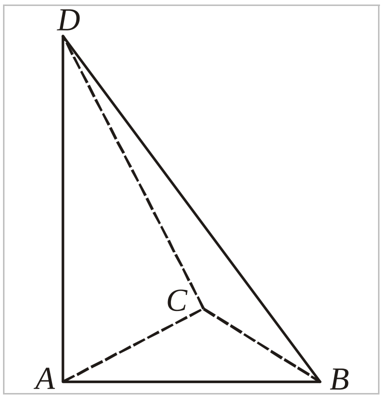
Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:



Prowadzimy wysokość *CE* trójkąta równobocznego *ABC*. Wówczas
$|AE| = 3$ i stąd $|CD| = |AE| = 3$.
Następnie $|BC| = |AB| = 6$
oraz $|DA| = |CE| = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.
Stąd obwód trapezu jest równy
$$6 + 6 + 3 + 3\sqrt{3} = 15 + 3\sqrt{3} .$$

Komentarz:
Zadanie okazało się dla ogółu zdających trudne.
Problemy w tym zadaniu pojawiały się już na etapie podziału trapezu. Niektórzy zdający przyjmowali, że otrzymane trójkąty to: trójkąt prostokątny równoramienny i trójkąt równoboczny lub dwa trójkąty prostokątne. Często pojawiały się także błędy rachunkowe przy obliczaniu wysokości trapezu, np. $h^2 = 36 - 9 = 25$ lub jego obwodu, np. $6 + 6 + 3 + 3\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$.

Zadanie 32. ***(4 pkt)***
Podstawą ostrosłupa *ABCD* jest trójkąt *ABC*. Krawędź *AD* jest wysokością ostrosłupa (zobacz rysunek). Oblicz objętość ostrosłupa *ABCD*, jeśli wiadomo, że $|AD| = 12$, $|BC| = 6$, $|BD| = |CD| = 13$.



Sprawdzane umiejętności Obliczenie objętości ostrosłupa (standard IV).	
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	0,47

Kategoria rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Obliczenie długości krawędzi *AB* lub *AC* podstawy ostrosłupa: $|AB|=5$, $|AC|=5$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Obliczenie wysokości AE trójkąta *ABC*: $|AE|=4$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Obliczenie pola podstawy ostrosłupa: $P_{ABC}=12$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Obliczenie objętości ostrosłupa: $V=48$.

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:

Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta *ABD* wynika, że $|AB|^2=|BD|^2-|AD|^2=25$, stąd $|AB|=5$. Podobnie z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta *ACD* wynika, że $|AC|=5$.

W trójkącie *ABC* prowadzimy wysokość *AE*. Trójkąt *ABC* jest równoramienny ($|AB|=|AC|$), więc $|BE|=|EC|=3$. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *ABE* mamy $|AE|^2=|AB|^2-|BE|^2=16$, stąd $|AE|=4$.

Zatem $P_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4=12$.

Objętość ostrosłupa jest równa $V=\frac{1}{3}\cdot 12\cdot 12=48$.

Komentarz:

Zadanie okazało się dla ogółu zdających trudne.

Rozwiązywanie zadania ze stereometrii wymaga zawsze bardzo uważnej analizy jego treści. W tym zadaniu wymagano od zdających dostrzeżenia odpowiednich trójkątów prostokątnych i umiejętności zastosowania do nich twierdzenia Pitagorasa. Błędy w rozwiązaniu tego zadania najczęściej wynikały z niewłaściwej interpretacji podstawy ostrosłupa, np. zdający zakładali, że trójkąt *ABC* jest równoboczny albo jest trójkątem równoramiennym o długości ramienia 6, poza tym pojawiło się dużo błędów związanych z pominięciem współczynnika $\frac{1}{2}$ we wzorze na pole trójkąta, bądź pominięcie współczynnika $\frac{1}{3}$ we wzorze na objętość ostrosłupa.

Zadanie 33. ***(4 pkt)***
Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia *A* polegającego na tym, że w pierwszym rzucie otrzymamy parzystą liczbę oczek i iloczyn liczb oczek w obu rzutach będzie podzielny przez 12. Wynik przedstaw w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

Sprawdzane umiejętności Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia z zastosowaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa (standard III).	
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	0,33

Kategoria rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania ....1 pkt

Zdający zapisze, że $|\Omega| = 36$ i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Zdający zapisze, że $|\Omega| = 36$ oraz, że $A = \{(2,6),(4,3),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6)\}$ i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt

Zdający zapisze, że $|\Omega| = 36$ oraz, że $|A| = 6$ i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

Rozwiązanie pełne..4 pkt

Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia *A*: $P(A) = \frac{1}{6}$

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:
Ω jest zbiorem wszystkich par (a,b) takich, że $a,b \in \{1,2,3,4,5,6\}$. Mamy model klasyczny.
$|\Omega| = 36$.
Zdarzeniu *A* sprzyjają następujące zdarzenia elementarne:
$(2,6),(4,3),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6)$
Zatem $|A| = 6$ i stąd $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Komentarz:
Zadanie okazało się dla ogółu zdających trudne.
Było to bardzo typowe zadanie, w którym zdający miał wykazać się umiejętnością obliczenia prawdopodobieństwa w prostej sytuacji probabilistycznej. Dobranie właściwego modelu, zliczenie odpowiednich wyników i zastosowanie twierdzenia „Klasyczna definicja prawdopodobieństwa” to najczęściej stosowany sposób rozwiązania drugiej części zadania. Rozwiązanie nie wymagało stosowania wzorów kombinatorycznych. Większość zdających nie potrafiła jednak poprawnie zbudować modelu rozwiązania. Zdający w większości przypadków nie mieli problemu z obliczeniem mocy Ω. Częstym błędem zdających było stosowanie

różnych modeli, innego do obliczania mocy Ω i innego do obliczenia mocy zbioru A. Uczniowie obliczali $|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$, zaś $|A| = 3 + 4 = 7$ lub $|A| = 3 + 2 = 5$. Częstym błędem zdających było podanie przy opisywaniu zdarzenia A pary $(3,4)$ niespełniającej warunków zadania. Zadanie pokazało, że wielu zdających ma poważne problemy z rozwiązaniem typowych zadań z rachunku prawdopodobieństwa dotyczących modelu klasycznego. Zostawianie odpowiedzi w postaci ułamka skracalnego świadczy o tym, że zdający nie czytali uważnie treści zadania i nie sprawdzali zgodności uzyskanego wyniku z poleceniem.
Niestety, w dalszym ciągu zdarzały się przypadki rozwiązań, w których $|A| > |\Omega|$.

Zadanie 34. ***(5 pkt)***
W dwóch hotelach wybudowano prostokątne baseny. Basen w pierwszym hotelu ma powierzchnię 240 m^2. Basen w drugim hotelu ma powierzchnię 350 m^2 oraz jest o 5 m dłuższy i 2 m szerszy niż w pierwszym hotelu. Oblicz, jakie wymiary mogą mieć baseny w obu hotelach. Podaj wszystkie możliwe odpowiedzi.

Sprawdzane umiejętności
Rozwiązanie zadania, umieszczonego w kontekście praktycznym, prowadzącego do równania kwadratowego (standard III).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	0,46

Kategoria rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Wprowadzenie oznaczeń, na przykład: x, y - wymiary basenu w pierwszym hotelu i zapisanie równania $x \cdot y = 240$ albo równania $(x+5)\cdot(y+2) = 350$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zapisanie układu równań z niewiadomymi x i y, np. $\begin{cases} x \cdot y = 240 \\ (x+5)\cdot(y+2) = 350 \end{cases}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt

Zapisanie równania z jedną niewiadomą x lub y, np: $(x+5)\cdot\left(\frac{240}{x}+2\right) = 350$.

Rozwiązanie prawie całkowite .... 4 pkt

Doprowadzenie równania wymiernego do równania kwadratowego oraz rozwiązanie równania kwadratowego, np. $x^2 - 50x + 600 = 0$, skąd $x = 20$ lub $x = 30$.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 4 pkt

Zdający popełnia błąd rachunkowy w rozwiązaniu równania (ale otrzymuje dwa rozwiązania) i konsekwentnie do popełnionego błędu oblicza wymiary obu basenów.

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt

Zapisanie wymiarów obu basenów:
Basen w pierwszym hotelu ma wymiary $30 \text{ m} \times 8 \text{ m}$ i w drugim hotelu $35 \text{ m} \times 10 \text{ m}$
lub basen w pierwszym hotelu ma wymiary $20 \text{ m} \times 12 \text{ m}$ i w drugim $25 \text{ m} \times 14 \text{ m}$.

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:
Oznaczmy przez x długość (w metrach) basenu w pierwszym hotelu i przez y szerokość (w metrach) tego basenu (w metrach). Zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} x \cdot y = 240 \\ (x+5)\cdot(y+2) = 350 \end{cases}$$

Przekształcamy drugie równanie w sposób równoważny: $x \cdot y + 2x + 5y + 10 = 350$,
podstawiamy do tego równania $x \cdot y = 240$ i wyznaczamy z tego równania, niewiadomą x:
$x = \frac{100-5y}{2}$. Wyznaczoną wartość x podstawiamy do pierwszego równania
$\frac{100-5y}{2} \cdot y = 240$ i doprowadzamy to równanie do postaci: $y^2 - 20y + 96 = 0$, które ma dwa rozwiązania: $y_1 = 8,\ y_2 = 12$.
Zatem:

- jeżeli $y = 8$, to $x = 30$ i wtedy basen w pierwszym hotelu ma wymiary: 30 m x 8 m, zaś basen w drugim hotelu: 35 m x 10 m,
- jeżeli $y = 12$, to $x = 20$ i wtedy basen w pierwszym hotelu ma wymiary: 20 m x 12 m, zaś basen w drugim hotelu: 25 m x 14 m.

Komentarz:
Zadanie okazało się dla ogółu zdających trudne, mimo że ten typ zadania pojawił się na próbnej maturze (a także w arkuszach wcześniej publikowanych na stronach internetowych CKE i OKE).
Najważniejszą umiejętnością badaną w tym zadaniu było czytanie ze zrozumieniem tekstu matematycznego i zapisywanie zależności między wielkościami opisanymi w zadaniu. Tylko połowa zdających nie miała trudności z przeprowadzeniem poprawnej analizy warunków zadania i zbudowaniem modelu matematycznego do przedstawionej sytuacji. Tylko niektórzy uczniowie stosowali prostszą metodę, prowadzącą bezpośrednio do utworzenia równania kwadratowego (z pominięciem równania wymiernego). Najwięcej błędów pojawiło się na etapie zapisywania układu równań. Zdający pisali np.:

- $\begin{cases} x \cdot y = 240 \\ x + 5 \cdot y + 2 = 350 \end{cases}$

albo

- $\begin{cases} 2x + 2y = 240 \\ 2(x+5) + 2(y+2) = 350 \end{cases}$

albo

- $\begin{cases} 2(xy + xz + yz) = 240 \\ 2\left[(x+5)\cdot(y+2) + (x+5)z + (y+2)z\right] = 350 \end{cases}$.

Niestety, również nie wszyscy zdający potrafili poprawnie rozwiązać zapisany układ równań, popełniali błędy logiczne i rachunkowe. Pojawiały się też rozwiązania, w których zdający nie budowali układu równań, a tylko podawali wymiary jednej lub dwóch par basenów spełniających warunki zadania.

ARKUSZ EGZAMINACYJNY – POZIOM ROZSZERZONY

Zadanie 1. ***(4 pkt)***
Rozwiąż nierówność $|2x+4|+|x-1|\le 6$.

Sprawdzane umiejętności
Rozwiązywanie nierówności z wartością bezwzględną (standard IV).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	0,59

Kategoria rozwiązania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 pkt

Zdający wyróżni na osi liczbowej przedziały $(-\infty,-2)$, $\langle -2,1)$, $\langle 1,\infty)$.
albo
zapisze cztery przypadki: $\begin{cases}2x+4\ge 0\\ x-1\ge 0\end{cases}$ $\begin{cases}2x+4\ge 0\\ x-1<0\end{cases}$ $\begin{cases}2x+4<0\\ x-1\ge 0\end{cases}$ $\begin{cases}2x+4<0\\ x-1<0\end{cases}$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 pkt

Zdający zapisze nierówności w poszczególnych przedziałach, np.
I. $x\in(-\infty,-2)$ $\quad -2x-4-x+1\le 6$
II. $x\in\langle -2,1)$ $\quad 2x+4-x+1\le 6$
III. $x\in\langle 1,\infty)$ $\quad 2x+4+x-1\le 6$

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe).. 3 pkt

- zdający poprawnie rozwiąże wszystkie trzy nierówności i wyznaczy części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami tylko w dwóch przypadkach, popełni błąd w trzecim przypadku i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca

albo

- zdający poprawnie rozwiązał nierówności tylko w dwóch przedziałach i wyznaczył części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca

albo

- zdający rozpatrzy cztery przypadki, poprawnie rozwiąże nierówności i wyznaczy części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami tylko w dwóch przypadkach, stwierdzi, że czwarty jest niemożliwy, popełni błąd w trzecim przypadku i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Zdający zapisze odpowiedź: $x\in\langle -3,1\rangle$.

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:
Wyróżniamy na osi liczbowej przedziały: $(-\infty,-2)$, $\langle -2,1)$, $\langle 1,\infty)$.

Rozwiązujemy nierówności w poszczególnych przedziałach i w każdym przedziale bierzemy część wspólną tego przedziału z otrzymanym zbiorem rozwiązań nierówności.

$x\in(-\infty,-2)$	$x\in\langle -2,1)$	$x\in\langle 1,\infty)$

$-2x-4-x+1\le 6$ $-3x\le 9$ $x\ge -3$ W tym przypadku rozwiązaniem nierówności jest $-3\le x<2$	$2x+4-x+1\le 6$ $x\le 1$ W tym przypadku rozwiązaniem nierówności jest $-2\le x<1$	$2x+4+x-1\le 6$ $3x\le 3$ $x\le 1$ W tym przypadku rozwiązaniem nierówności jest $x=1$
Łącząc otrzymane rozwiązania, podajemy ostateczną odpowiedź: $-3\le x\le 1$ lub zapisujemy odpowiedź: Zbiorem rozwiązań nierówności jest $\langle -3,1\rangle$.		

Komentarz:
Zadanie okazało się dla ogółu zdających umiarkowanie trudne.
Pojawiające się w rozwiązaniach błędy pokazują, że część zdających nie opanowała w dostatecznym stopniu umiejętności stosowania definicji wartości bezwzględnej, mimo że zadanie z wartością bezwzględną pojawia się corocznie na egzaminie maturalnym.
Stąd na przykład błędy:

- $-6\le 2x+4+x-1\le 6$

albo

- $2x+4+x-1\le 6 \vee -2x-4-x+1\le 6$.

W prezentowanych rozwiązaniach najczęściej brakowało jednak wyznaczenia części wspólnej przedziału z otrzymanym zbiorem rozwiązań nierówności. Pojawiały się też liczne błędy rachunkowe. Na podkreślenie zasługuje fakt, że poprawne rozwiązanie zadania przedstawiła duża grupa zdających.

Zadanie 2. ***(4 pkt)***

Wyznacz wszystkie rozwiązania równania $2\cos^2 x-5\sin x-4=0$ należące do przedziału $\langle 0,\ 2\pi\rangle$.

Sprawdzane umiejętności Rozwiązywanie równania trygonometrycznego (standard IV).	
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	0,70

Kategoria rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Zapisanie równania w zależności od jednej funkcji trygonometrycznej, np.
$-2\sin^2 x-5\sin x-2=0$ lub $2\sin^2 x+5\sin x+2=0$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Wprowadzenie pomocniczej niewiadomej, np. $t=\sin x$, zapisanie równania w postaci
$-2t^2-5t-2=0$ lub $2t^2+5t+2=0$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Rozwiązanie równania kwadratowego ($t=-2$ lub $t=-\frac{1}{2}$) i odrzucenie rozwiązania $t=-2$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Rozwiązanie równania w podanym przedziale: $x=\frac{7}{6}\pi$ lub $x=\frac{11}{6}\pi$.

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania: Przekształcamy równanie do postaci, w której występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna: $2\left(1-\sin^2 x\right)-5\sin x-4=0$ Porządkujemy to równanie i wprowadzamy niewiadomą pomocniczą: $-2\sin^2 x-5\sin x-2=0$, $t=\sin x$, gdzie $t\in\langle -1,1\rangle$. Równanie przyjmuje teraz postać: $2t^2+5t+2=0$ Rozwiązujemy równanie kwadratowe ze zmienną t: $\Delta=9 \quad t_1=-2 \quad t_2=-\frac{1}{2}$ ale $t_1\notin\langle -1,1\rangle$ Zapisujemy zatem rozwiązania równania $\sin x=-\frac{1}{2}$ należące do przedziału $\langle 0,2\pi\rangle$: $x=\frac{11\pi}{6}$ i $x=\frac{7}{6}\pi$
Komentarz: Zadanie okazało się dla ogółu zdających łatwe. Zdający, którzy przystąpili do rozwiązania równania, zazwyczaj nie mieli problemów z doborem strategii zapewniającej sukces w rozwiązaniu zadania. „Jedynka trygonometryczna” to zależność dobrze znana i umiejętnie stosowana przez większość z nich. Problemu nie sprawiało również rozwiązanie równania kwadratowego, choć tutaj najczęściej zdający popełniali błędy logiczne i rachunkowe, np.: $-2t^2-5t-2=0$ $t=\frac{5+3}{2}=4$ lub $t=\frac{5-3}{2}=1$. Warto również podkreślić, iż zdający nie mieli problemu z rozwiązaniem elementarnego równania trygonometrycznego $\sin x=-\frac{1}{2}$, chociaż nie zawsze pamiętali o wskazaniu rozwiązań z przedziału $\langle 0,\ 2\pi\rangle$.

Zadanie 3. ***(4 pkt)***

Bok kwadratu *ABCD* ma długość 1. Na bokach *BC* i *CD* wybrano odpowiednio punkty *E* i *F* umieszczone tak, by $|CE|=2|DF|$. Oblicz wartość $x=|DF|$, dla której pole trójkąta *AEF* jest najmniejsze.

Sprawdzane umiejętności Rozwiązywanie zadania w kontekście praktycznym prowadzącego do badania funkcji kwadratowej (standard IV).	
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	0,39
Kategoria rozwiązania **Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania.. 1 pkt** Zapisanie, że $P_{AEF}=P_{ABCD}-P_{ADF}-P_{CEF}-P_{ABE}$ lub $P_{AEF}=P_{ABCD}-\left(P_{ADF}+P_{CEF}+P_{ABE}\right)$. **Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp... 2 pkt** Zapisanie pól trójkątów *ADF*, *ABE* i *CEF*: $P_{\Delta ADF}=\frac{1}{2}x$, $P_{\Delta ABE}=\frac{1-2x}{2}$ i $P_{\Delta CEF}=\frac{-2x^2+2x}{2}=-x^2+x$.	

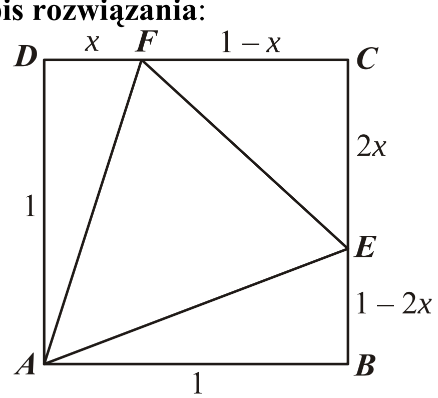
Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt

Zapisanie P_{AEF} w postaci trójmianu kwadratowego zmiennej *x*: $P(x)=x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

Rozwiązanie pełne..4 pkt

Wyznaczenie *x*, dla którego funkcja przyjmuje minimum: $x=\frac{1}{4}$.

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:



Długości odcinków $|BE|$ i $|CF|$ są równe: $|BE|=1-2x$, $|CF|=1-x$.

Pole trójkąta *AEF* jest więc równe:

$$P_{AEF}=P_{ABCD}-P_{ABE}-P_{ECF}-P_{FDA}=1-\frac{1}{2}(1-2x)-\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot(1-x)-\frac{1}{2}x=x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

Pole trójkąta *AEF* jest funkcją zmiennej *x*: $P(x)=x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ dla $x\in\left\langle 0,\frac{1}{2}\right\rangle$.

Ponieważ $x_w=-\frac{-\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{4}\in\left\langle 0,\frac{1}{2}\right\rangle$ a parabola o równaniu $P(x)=x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ ma ramiona skierowane „ku górze", więc dla $x=\frac{1}{4}$ pole trójkąta *AEF* jest najmniejsze.

Komentarz:

Zadanie okazało się dla ogółu zdających trudne.

Błędy występowały już na etapie wprowadzenia oznaczeń, maturzyści zapisywali np. $|CE|=\frac{1}{2}x$ lub przyjmowali, że $|DF|=\frac{1}{3}$ a $|CE|=\frac{2}{3}$. Pojawiały się też błędy związane z obliczeniem pola trójkąta *AEF*. Zdający:

- zapominali o współczynniku $\frac{1}{2}$ we wzorze na pole trójkąta i zapisywali, np.
  $P_{AEF}=1-(1-2x)-2x(1-x)-x=2x^2-x$
- nie potrafili poprawnie przekształcić wyrażenia algebraicznego i zapisywali, np. $1-\frac{1}{2}(1-2x)-\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot(1-x)-\frac{1}{2}x=1-\frac{1}{2}-x-x-x^2-\frac{1}{2}x$
- popełniali błędy rachunkowe.

Zdający, którzy poprawnie zapisali pole trójkąta *AEF* jako funkcję zmiennej *x*, z reguły nie mieli kłopotów z rozwiązaniem problemu optymalizacyjnego.

Zadanie 4. *(4 pkt)*
Wyznacz wartości a i b współczynników wielomianu $W(x)=x^3+ax^2+bx+1$ wiedząc, że $W(2)=7$ oraz, że reszta z dzielenia $W(x)$ przez $(x-3)$ jest równa 10.

Sprawdzane umiejętności
Zastosowanie twierdzenia o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian (standard IV).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	0,71

Kategoria rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego do rozwiązania zadania .... 1 pkt
Zapisanie jednego z równań: $8+4a+2b+1=7$ albo $27+9a+3b+1=10$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 pkt
Zapisanie układu równań: $\begin{cases} 8+4a+2b+1=7 \\ 27+9a+3b+1=10 \end{cases}$.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 3 pkt
Rozwiązanie układu równań z błędem rachunkowym.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt
Rozwiązanie układu równań $\begin{cases} a=-5 \\ b=9 \end{cases}$.

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:
Z treści zadania i twierdzenia Bèzout wynika, że $W(2)=7$ i $W(3)=10$.
Zapisujemy układ równań

$$\begin{cases} 8+4a+2b+1=7 \\ 27+9a+3b+1=10 \end{cases}$$

Równanie $27+9a+3b+1=10$ możemy otrzymać z warunku $W(3)=10$ lub wykonując dzielenie wielomianów i zapisując, że reszta z dzielenia jest równa 10.

Rozwiązujemy układ równań otrzymując kolejno

$$\begin{cases} 4a+2b=-2 \\ 9a+3b=-18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=-2a-1 \\ 9a-6a-3=-18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=-5 \\ b=9 \end{cases}$$

Warunki zadania są spełnione dla $a=-5, \quad b=9$.

Komentarz:
Zadanie okazało się dla ogółu zdających łatwe.
Kluczowy dla rozwiązania tego zadania okazał się zapis $W(3)=10$. Większość zdających bez problemu

poradziła sobie z tą umiejętnością, choć pojawiały się także inne zapisy, np. $W(x-3)=10$ albo $W(3)=0$. Jednak najwięcej błędów zdający popełniali na etapie rozwiązywania układu równań, czyli w umiejętności, która na poziomie rozszerzonym nie powinna sprawiać żadnych trudności.

Zadanie 5. ***(5 pkt)***

O liczbach a, b, c wiemy, że ciąg (a, b, c) jest arytmetyczny i $a+c=10$, zaś ciąg $(a+1,\ b+4,\ c+19)$ jest geometryczny. Wyznacz te liczby.

Sprawdzane umiejętności

Wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego do rozwiązania zadania (standard III).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	0,83

Kategoria rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny do pełnego rozwiązania zadania ....1 pkt

Wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego (geometrycznego) i zapisanie odpowiedniego równania, np. $2b=a+c$ albo $(b+4)^2=(a+1)(c+19)$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Wykorzystanie własności obu ciągów (arytmetycznego i geometrycznego) i zapisanie układu równań umożliwiającego obliczenie liczb a, b, c, np. $\begin{cases} 2b=a+c \\ a+c=10 \\ (b+4)^2=(a+1)\cdot(c+19) \end{cases}$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt

Przekształcenie układu równań do równania kwadratowego z niewiadomą c lub a, np.
$c^2+8c-128=0$ lub $a^2-28a+52=0$

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ....4 pkt

- poprawne rozwiązanie równania kwadratowego, odrzucenie jednego z rozwiązań i poprawne wyznaczenie drugiej trójki liczb

albo

- przekształcenie układu równań z jedną niewiadomą do równania kwadratowego z błędem rachunkowym, np. błąd w redukcji wyrazów podobnych lub w przepisywaniu i konsekwentne doprowadzenie rozwiązania do końca (o ile otrzymane równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki rzeczywiste).

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt

Wyznaczenie szukanych liczb: $a=2,\ b=5,\ c=8$ lub $a=26,\ b=5,\ c=-16$.

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:

Z własności ciągu arytmetycznego mamy: $2b=a+c$. Stąd otrzymujemy $2b=10$, czyli $b=5$.

Z własności ciągu geometrycznego zapisujemy równanie: $(b+4)^2=(a+1)\cdot(c+19)$.

Zatem otrzymujemy układ równań, np. $\begin{cases} b=5 \\ a+c=10 \\ (b+4)^2=(a+1)\cdot(c+19) \end{cases}$

Z drugiego równania wyznaczamy $a=10-c$ lub $c=10-a$ i wstawiamy do trzeciego równania.
Otrzymujemy równanie, np. $9^2=(10-c+1)(c+19)$ lub $9^2=(a+1)(10-a+19)$. Przekształcamy to równanie i otrzymujemy równanie z niewiadomą c lub a, np.
$c^2+8c-128=0$ lub $a^2-28a+52=0$.
Rozwiązaniami tego równania są :
$c_1=8,\ c_2=-16$ lub $a_1=2,\ a_2=26$.
Zatem szukanymi liczbami są: $a=2,\ b=5,\ c=8$ lub $a=26,\ b=5,\ c=-16$

Komentarz:
Zadanie okazało się dla ogółu zdających łatwe i jednocześnie było dla nich najłatwiejszym zadaniem w tym arkuszu.
Kolejny raz okazało się, że zdający nie mieli problemów z interpretacją treści zadania (w tym z wykorzystaniem własności obu ciągów). Trudności pojawiły się jednak na etapie rozwiązywania układu równań. Najczęściej były to błędy rachunkowe. Wielu zdających miało też problemy z właściwą interpretacją otrzymanych wyników i odrzucało rozwiązanie $c_2=-16$ jako niespełniające warunków zadania.

Zadanie 6. ***(5 pkt)***

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2+mx+2=0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste takie, że suma ich kwadratów jest większa od $2m^2-13$.

Sprawdzane umiejętności
Przeprowadzenie dyskusji dotyczącej rozwiązań równania kwadratowego z parametrem (standard IV).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	0,61

Kategoria rozwiązania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech części.

a) Pierwsza polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta>0$, $m\in\left(-\infty,-2\sqrt{2}\right)\cup\left(2\sqrt{2},\infty\right)$.
Za poprawne rozwiązanie tej części zdający otrzymuje **1 punkt.**

b) Druga polega na rozwiązaniu nierówności $x_1^2+x_2^2>2m^2-13$, $m\in(-3,3)$.
Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **3 punkty**.

c) Trzecia polega na wyznaczeniu części wspólnej rozwiązań nierówności z a) i b).
Za poprawne rozwiązanie trzeciej części zdający otrzymuje **1 punkt**.

W ramach drugiej części rozwiązania wyróżniamy następujące kategorie:

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

- zapisanie nierówności $x_1^2+x_2^2>2m^2-13$ w postaci równoważnej $m^2-4>2m^2-13$

albo

- wykorzystanie wzorów na pierwiastki trójmianu kwadratowego i zapisanie nierówności

<table>
<tr><td>

$$\left(\frac{-m+\sqrt{m^2-8}}{2}\right)^2+\left(\frac{-m-\sqrt{m^2-8}}{2}\right)^2>2m^2-13.$$

Pokonanie zasadniczych trudności .... 2 pkt
Doprowadzenie do postaci nierówności kwadratowej $m^2-9<0$.
Rozwiązanie pełne .... 3 pkt
Rozwiązanie nierówności: $m\in(-3,3)$.
</td></tr>
<tr><td>

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:
$x^2+mx+2=0$
Zapisujemy układ nierówności:

$$\begin{cases}\Delta>0\\ x_1^2+x_2^2>2m^2-13\end{cases}$$

Rozwiązujemy pierwszą nierówność tego układu:
$\Delta=m^2-8$
$\Delta>0$
$m^2-8>0$
$m\in\left(-\infty,-2\sqrt{2}\right)\cup\left(2\sqrt{2},\infty\right)$
Aby rozwiązać drugą nierówność, najpierw przekształcimy lewą stronę nierówności, korzystając ze wzorów Viète'a:
$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(-m)^2-2\cdot2=m^2-4$
Rozwiązujemy zatem nierówność:
$m^2-4>2m^2-13$
$m^2-9<0$, więc $m\in(-3,3)$
Wyznaczamy wspólną część zbiorów rozwiązań układu nierówności:
$m\in\left(-\infty,-2\sqrt{2}\right)\cup\left(2\sqrt{2},\infty\right)$ i $m\in(-3,3)$,
więc $m\in\left(-3,-2\sqrt{2}\right)\cup\left(2\sqrt{2},3\right)$.
</td></tr>
<tr><td>

Komentarz:
Zadanie okazało się dla ogółu zdających umiarkowanie trudne.
Był to typowy problem z zakresu funkcji kwadratowej (pojawiający się w arkuszach maturalnych), dlatego zdający nie mieli problemu z doborem strategii rozwiązania tego zadania. Błędy najczęściej pojawiały się na etapie rozwiązania nierówności $x_1^2+x_2^2>2m^2-13$. Zdający nie potrafili zapisać wyrażenia $x_1^2+x_2^2$ za pomocą wzorów Viète'a, przyjmując np. $x_1^2+x_2^2=\left(x_1+x_2\right)^2$ lub korzystając z wzorów, zapisywali je błędnie: $x_1+x_2=\frac{-b}{2a}$ i $x_1x_2=\frac{c}{2a}$. Nie wszyscy zdający pamiętali także o konieczności rozważenia warunku $\Delta>0$.
</td></tr>
</table>

Zadanie 7. ***(6 pkt)***

Punkt $A=(-2,5)$ jest jednym z wierzchołków trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AC|=|BC|$. Pole tego trójkąta jest równe 15. Bok BC jest zawarty w prostej o równaniu $y=x+1$. Oblicz współrzędne wierzchołka C.

Sprawdzane umiejętności	
Zastosowanie równania do opisania zależności w prostokątnym układzie współrzędnych (standard IV).	
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	0,42

Kategoria rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Obliczenie odległości punktu A od prostej $y = x + 1$: $d = 3\sqrt{2}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Obliczenie długości odcinków AC i BC: $|AC| = |BC| = 5\sqrt{2}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 4 pkt

Ułożenie układu równań pozwalającego obliczyć współrzędne punktu C (odległość $|AC| = 5\sqrt{2}$ oraz punkt C należy do prostej o równaniu $y = x + 1$)

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ (x+2)^2 + (y-5)^2 = 50 \end{cases}$$

i zapisanie równania kwadratowego: $x^2 - 2x - 15 = 0$.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 5 pkt

Rozwiązanie pełne .... 6 pkt

Wyznaczenie współrzędnych punktu C: $C = (5,6)$ lub $C = (-3,-2)$.

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:

Obliczamy odległość punktu A od prostej $y = x + 1$: $d = \dfrac{|-2-5+1|}{\sqrt{1+1}} = 3\sqrt{2}$.

Obliczona odległość d jest równa wysokości trójkąta ABC poprowadzonej do boku BC. Znamy pole trójkąta ABC, więc obliczamy długość boku BC.

$P_{ABC} = 15 \qquad \frac{1}{2} d \cdot |BC| = 15 \qquad |BC| = \dfrac{30}{3\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$

Punkt $C = (x, y)$ leży na prostej o równaniu $y = x + 1$, zatem $C = (x, x+1)$.

Ponieważ $|AC| = |BC|$, więc ze wzoru na długość odcinka zapisujemy równanie:

$\sqrt{(x+2)^2 + (x+1-5)^2} = 5\sqrt{2}$.

Rozwiązujemy otrzymane równanie:

$\sqrt{(x+2)^2 + (x+1-5)^2} = 5\sqrt{2}$

$x^2 + 4x + 4 + x^2 - 8x + 16 = 50$

$x^2 - 2x - 15 = 0$

$\Delta = 64 \qquad x_1 = 5 \qquad x_2 = -3$ i następnie $y_1 = 6 \qquad y_2 = -2$

Ostatecznie otrzymujemy dwa punkty: $C_1 = (5,6) \quad C_2 = (-3,-2)$.

Komentarz:

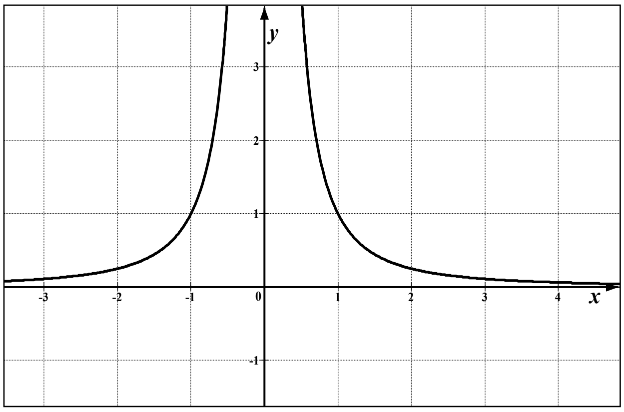
Zadanie okazało się dla ogółu zdających trudne.

Analizując rozwiązania, można zauważyć, że zdający, którzy podjęli próbę rozwiązania tego problemu, potrafili wykorzystać informację o polu trójkąta, tzn. obliczyć długość boku BC. Niestety, w dalszej części rozwiązania najczęściej popełnianym błędem było przyjęcie, że $|AB| = |AC|$. Pojawiły się także rozwiązania, w których zdający po obliczeniu długości odcinków AD, AC i CD (punkt D jest rzutem prostokątnym punktu A na prostą o równaniu $y = x + 1$) odczytywali współrzędne punktu C z rysunku, gubiąc jedno rozwiązanie.

Podczas rozwiązywania tego zadania zdający popełniali wiele błędów rachunkowych.

Zadanie 8. ***(5 pkt)***

Rysunek przedstawia fragment wykresu funkcji $f(x)=\frac{1}{x^2}$. Przeprowadzono prostą równoległą do osi Ox, która przecięła wykres tej funkcji w punktach A i B. Niech $C=(3,-1)$. Wykaż, że pole trójkąta ABC jest większe lub równe 2.



Sprawdzane umiejętności Przeprowadzenie dowodu algebraicznego (standard V).	
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	0,28

Kategoria rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania ....1 pkt

Zapisanie współrzędnych dwóch punktów leżących na wykresie funkcji $f\left(x\right)=\frac{1}{x^2}$ oraz na prostej równoległej do osi Ox, np. $A=\left(x,\frac{1}{x^2}\right)$, $B=\left(-x,\frac{1}{x^2}\right)$, gdzie $x>0$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Zapisanie długości odcinka AB oraz wysokości h trójkąta ABC, np.: $\left|AB\right|=2\left|x\right|$ i $h=\frac{1}{x^2}+1$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt

Zapisanie pola trójkąta ABC w zależności od jednej zmiennej: $P_{ABC}=\frac{2\cdot\left|x\right|\cdot\left|\frac{1}{x^2}+1\right|}{2}=\frac{1}{\left|x\right|}+\left|x\right|$.

Rozwiązanie pełne 5pkt

Uzasadnienie, że $\frac{1}{\left|x\right|}+\left|x\right|\geq 2$.

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:

Zapisujemy współrzędne dwóch punktów leżących na wykresie funkcji $f\left(x\right)=\frac{1}{x^2}$ oraz na prostej równoległej do osi Ox, np. $A=\left(x,\frac{1}{x^2}\right)$, $B=\left(-x,\frac{1}{x^2}\right)$, gdzie $x\neq 0$.

Zapisujemy pole trójkąta ABC, gdzie $C=\left(3,-1\right)$ w zależności od jednej zmiennej:

$$P_{ABC}=\frac{2\cdot|x|\cdot\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}{2}=\frac{1}{|x|}+|x|.$$

Należy udowodnić, że pole trójkąta *ABC* jest większe lub równe 2, czyli $\frac{1}{|x|}+|x|\ge 2$, dla $x\neq 0$.

Wystarczy wobec tego udowodnić (lub powołać się na znaną nierówność), że dla dowolnej liczby $a>0$ zachodzi nierówność $\frac{1}{a}+a\ge 2$. Po pomnożeniu obu stron nierówności przez a otrzymujemy nierówność równoważną $1+a^2\ge 2a$, czyli $a^2-2a+1\ge 0$, a więc nierówność $(a-1)^2\ge 0$, co kończy dowód.

Komentarz:
Zadanie okazało się dla ogółu zdających trudne.
Prawie 7% maturzystów nie podjęło próby rozwiązania tego problemu, co potwierdza, że zadania typu „wykaż” budzą obawy także wśród zdających matematykę na poziomie rozszerzonym. Uczniowie, którzy przystąpili do rozwiązywania tego zadania, z reguły nie mieli problemu z zapisaniem pola trójkąta *ABC* w zależności od jednej zmiennej. Trudności pojawiały się na etapie uzasadnienia, że $\frac{1}{|x|}+|x|\ge 2$. Zdający pisali na przykład:

- $\frac{1}{x}+x\ge 2,\ x\neq 0$, czyli $1+x^2\ge 2x,\ x\neq 0$
- $\frac{1}{x}+x\ge 2$, zatem $\frac{1-2x+x^2}{x}\ge 0$, czyli $x\left(1-2x+x^2\right)\ge 0$ dla $x\in R\setminus\{0\}$

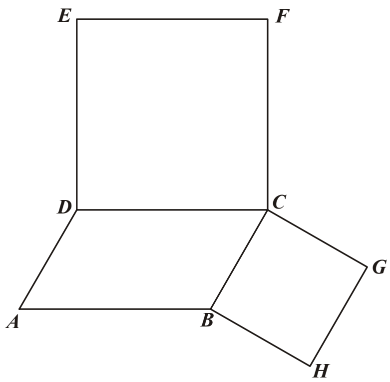
albo dowodzili prawdziwości nierówności $\frac{1}{a}+a\ge 2$ bez założenia, że $a>0$.

Pojawiały się też rozwiązania, w których zdający dowodzili, że pole trójkąta *ABC* jest większe lub równe 2 dla wybranych punktów *A*, *B*, spełniających warunki zadania, np.
$A=(1,1)$, $B=(-1,1)$ $C=(3,-1)$

$|AB|=2$ i $h=2$

$P_{ABC}=\frac{2\cdot 2}{2}=2\ge 2$.

Zadanie 9. ***(4 pkt)***
Na bokach *BC* i *CD* równoległoboku *ABCD* zbudowano kwadraty *CDEF* i *BCGH* (zobacz rysunek). Udowodnij, że $|AC|=|FG|$.



Sprawdzane umiejętności Przeprowadzenie dowodu geometrycznego (standard V).	
Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	0,61

Kategoria rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt
Zaznaczenie na rysunku odcinków *AC* i *FG* oraz zapisanie równości $|AB| = |CF|$ i $|BC| = |CG|$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt
Stwierdzenie, że trójkąty *ABC* i *FCG* są przystające, na podstawie cechy (bkb), bez podania pełnego uzasadnienia równości kątów $|\angle FCG| = |\angle ABC|$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt
- Stwierdzenie, że trójkąty *ABC* i *FCG* są przystające, wraz z podaniem pełnego uzasadnienia równości kątów $|\angle FCG| = |\angle ABC|$ i niezapisanie wniosku, że $|AC| = |FG|$.

albo
- Stwierdzenie, że trójkąty *ABC* i *FCG* są przystające, na podstawie cechy (bkb), bez podania pełnego uzasadnienia równości kątów $|\angle FCG| = |\angle ABC|$, oraz zapisanie wniosku, że $|AC| = |FG|$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt
Zapisanie wniosku, że $|AC| = |FG|$.

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:
Czworokąt *ABCD* jest równoległobokiem, czworokąt *DCFE* jest kwadratem, więc $|AB| = |CD| = |CF|$. W kwadracie *CBHG* odcinki *BC* i *CG* są równe.

Niech α oznacza kąt *ABC* danego równoległoboku. Wówczas $|\angle BCD| = 180° - \alpha$. W kwadratach *CDEF* oraz *CBHG* mamy $|\angle DCF| = |\angle BCG| = 90°$, więc

$|\angle FCG| = 360° - (180° - \alpha) - 90° - 90° = \alpha = |\angle ABC|$.

W trójkątach *ABC* i *FCG* mamy zatem: $|AB| = |CF|$, $|BC| = |CG|$ oraz $|\angle FCG| = |\angle ABC|$, więc trójkąty *ABC* i *FCG* są przystające (cecha *bkb*). Stąd wnioskujemy, że $|AC| = |FG|$.

Komentarz:
Zadanie okazało się dla ogółu zdających umiarkowanie trudne.
Większość zdających próbowała zmierzyć się z problemem przeprowadzenia dowodu matematycznego zapewne ze względu na przyjazne treści. Rozwiązanie tego problemu wymagało bowiem od zdających znajomości podstawowych wiadomości dotyczących przystawania trójkątów, umiejętności logicznego formułowania i uzasadniania wniosków oraz poprawnego ich zapisywania w języku matematyki. Na podstawie analizy rozwiązań uczniowskich można zauważyć, że zdający nie mieli problemów ze stwierdzeniem, że trójkąty *ABC* i *FCG* są przystające na podstawie cechy (*bkb*). Niestety, niewielu zdających uzasadniało równość kątów $|\angle FCG| = |\angle ABC|$.

Zadanie 10. ***(4 pkt)***
Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w trzech rzutach symetryczną sześcienną kostką do gry suma kwadratów liczb uzyskanych oczek będzie podzielna przez 3.

Sprawdzane umiejętności
Obliczenie prawdopodobieństwa z wykorzystaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa (standard III).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	0,30

Kategoria rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny do rozwiązania zadania ....1 pkt

Zdający zapisze, że $|\Omega| = 6^3$ i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

Istotny postęp. ....2 pkt

Zdający zapisze, że suma kwadratów trzech liczb jest podzielna przez 3 tylko wtedy, gdy wszystkie liczby są podzielne przez 3 albo wszystkie są niepodzielne przez 3.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt

Zdający poprawnie obliczy liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zajściu zdarzenia *A*: $|A| = 72$ i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie

Rozwiązanie pełne ....4 pkt

$P(A) = \frac{1}{3}$

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:
Zdarzeniami elementarnymi są trzywyrazowe ciągi o wartościach w zbiorze sześcioelementowym. Mamy model klasyczny. $|\Omega| = 6^3 = 216$.

Określamy zdarzenie *A* – suma kwadratów liczb uzyskanych oczek będzie podzielna przez 3.
Reszta z dzielenia kwadratu liczby całkowitej przez 3 może być równa 0 lub 1. Suma trzech kwadratów będzie podzielna przez 3 wtedy, gdy każdy z nich będzie podzielny przez 3 albo gdy reszta z dzielenia każdego z nich przez 3 będzie równa 1.
Kwadraty liczb 3 i 6 są liczbami podzielnymi przez 3.
Kwadraty liczb 1, 2, 4 i 5 dają z dzielenia przez 3 resztę 1.
$|A|$ możemy obliczać następująco:

- ciągi o wartościach ze zbioru $\{3,6\}$ – jest ich $2^3 = 8$,
- ciągi o wartościach ze zbioru $\{1,2,4,5\}$ – jest ich $4^3 = 64$,

czyli $|A| = 2^3 + 4^3 = 72$

Zatem $P(A) = \frac{72}{216} = \frac{1}{3}$.

Komentarz:
Zadanie okazało się dla ogółu zdających trudne.
Większość zdających potrafiła określić liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych, czyli zapisać $|\Omega| = 6^3$. Problemy pojawiły się natomiast na etapie opisania zbioru zdarzeń sprzyjających zdarzeniu *A*. Niewielu zdających zapisało, że suma kwadratów trzech liczb jest podzielna przez 3 tylko wtedy, gdy wszystkie liczby są podzielne przez 3 albo wszystkie są niepodzielne przez 3. Pojawiały się natomiast obliczenia, np. $|A| = 2^3$ albo $|A| = 4^3$, albo $|A| = C_6^2 \cdot C_6^2 \cdot C_6^2 + C_6^4 \cdot C_6^4 \cdot C_6^4$.
Nieliczna grupa zdających próbowała rozwiązać to zadanie, wypisując wszystkie 216 zdarzeń elementarnych i sprawdzając, które z nich spełniają podany warunek. Próby te z reguły kończyły się sukcesem.

Zadanie 11. ***(4 pkt)***

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość a. Ściany boczne są trójkątami ostrokątnymi. Miara kąta między sąsiednimi ścianami bocznymi jest równa 2α. Wyznacz objętość tego ostrosłupa.

Sprawdzane umiejętności

Wyznaczenie objętość wielościanu z wykorzystaniem trygonometrii (standard IV).

Wskaźnik łatwości zadania dla ogółu zdających	0,23

Kategoria rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Wykonanie rysunku ostrosłupa i zaznaczenie na nim kąta między sąsiednimi ścianami bocznymi.

Rozwiązanie, w którym jest istotny .... 2 pkt

Wyznaczenie wysokości EF trójkąta ABE w zależności od a i α: $m = \dfrac{a}{2\operatorname{tg}\alpha}$.

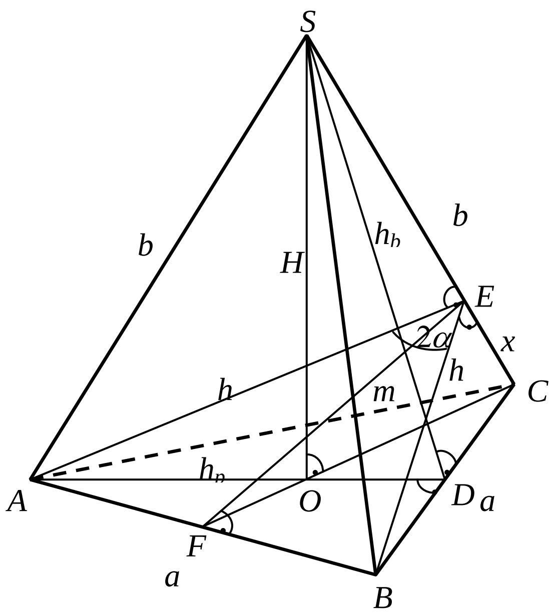
Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Wyznaczenie długości odcinka EC: $x = \dfrac{a\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}{2\sin\alpha}$.

Rozwiązanie prawie całkowite .... 4 pkt

Wyznaczenie wysokości ostrosłupa: $H = \dfrac{a\cos\alpha}{\sqrt{3\left(4\sin^2\alpha - 1\right)}}$.

Przykładowy poprawny zapis rozwiązania:



Wysokość podstawy ostrosłupa jest równa $h_p = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Wyznaczamy wysokość FE trójkąta równoramiennego ABE

$\mathrm{tg}\alpha = \frac{|FB|}{|BE|} = \frac{\frac{1}{2}a}{m}$, stąd $m = \frac{a}{2\mathrm{tg}\alpha}$.

Wyznaczamy długość odcinka EC z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie FCE:

$x = \sqrt{{h_p}^2 - m^2}$

$$x = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2\mathrm{tg}\alpha}\right)^2} = a\sqrt{\frac{3\mathrm{tg}^2\alpha - 1}{4\mathrm{tg}^2\alpha}} = \frac{a\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}{2\sin\alpha}$$

Z podobieństwa trójkątów OCS i ECF mamy

$\frac{|OS|}{|OC|} = \frac{|EF|}{|EC|}$, czyli $\frac{H}{\frac{2}{3}h_p} = \frac{m}{x}$.

Stąd $H = \dfrac{m \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}{2\sin\alpha}} = \dfrac{\frac{a}{2\mathrm{tg}\alpha} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{a\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}{2\sin\alpha}} = \dfrac{a\cos\alpha}{\sqrt{3}\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}$

Wyznaczamy objętość ostrosłupa:

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\cos\alpha}{\sqrt{3}\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}} = \frac{a^3\cos\alpha}{12\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}$.

Komentarz:

Zadanie okazało się dla ogółu zdających trudne i jednocześnie było najtrudniejszym zadaniem w tym arkuszu.

Rozwiązywanie tego zadania wymagało przede wszystkim opanowania wiadomości dotyczących kąta dwuściennego i uważnej analizy jego treści, a co za tym idzie – opracowania strategii rozwiązania obliczenia wysokości ostrosłupa. Zdający popełniali błędy już na etapie wykonywania rysunku pomocniczego, niewłaściwie zaznaczając kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi. Pojawiały się błędy rachunkowe i logiczne. Wielu zdających ograniczyło się tylko do wyznaczenia wysokości ściany bocznej ostrosłupa, np.

$\sin\alpha = \frac{|FB|}{|BE|} = \frac{\frac{1}{2}a}{h}$, stąd $h = \frac{a}{2\sin\alpha}$, nie mając pomysłu na rozwiązanie postawionego w zadaniu problemu.

5 Podsumowanie i wnioski

Wyniki egzaminu maturalnego świadczą o tym, że zdający poprawnie rozwiązywali zadania typowe, o małym stopniu złożoności lub zadania podobne do tych, które występowały na poprzednich egzaminach, włącznie z egzaminem próbnym. W przypadku zadań nietypowych, wymagających rozwiązywania problemów matematycznych, większość zdających miała problemy już na etapie analizy zadania. Duży procent opuszczeń wystąpił w zadaniach na dowodzenie.

W pracy dydaktycznej z uczniami należy zwrócić uwagę na kształcenie umiejętności analizy warunków zadania i doboru optymalnych metod rozwiązywania problemów matematycznych. Należy pracować nad tym, aby uczniowie dobrze rozumieli wprowadzane na zajęciach definicje i twierdzenia oraz potrafili je interpretować, także geometrycznie. Ułatwia to budowanie modelu matematycznego, zwłaszcza w przypadku zadań praktycznych i zadań z rachunku prawdopodobieństwa. Poziom merytoryczny odpowiedzi uczniów był bardzo zróżnicowany. Obok rozwiązań świadczących o wiedzy i umiejętności samodzielnego myślenia, zdarzały się odpowiedzi błędne i nielogiczne. Kolejny raz okazało się, że poważnym mankamentem była niedostateczna sprawność w przekształcaniu wyrażeń.

Często zdający poprawnie analizowali warunki zadania, poprawnie zapisywali równania, ale błędy rachunkowe uniemożliwiały im rozwiązanie zadania lub prowadziły do niepoprawnych rozwiązań.

Wprowadzenie obowiązkowego egzaminu maturalnego z matematyki poprzedzone było szeroką akcją informacyjną skierowaną do uczniów i nauczycieli. Ukazały się między innymi dwa przykładowe arkusze egzaminacyjne w *Informatorze maturalnym,* a kolejne były opublikowane na stronach internetowych CKE i OKE we wrześniu i listopadzie 2009 roku. Analiza rozwiązań zadań otwartych na poziomie podstawowym wskazuje, iż nie wszyscy maturzyści korzystali z przygotowanych dla nich materiałów pomocniczych. W pracy dydaktycznej z uczniami przygotowującymi się do egzaminu maturalnego w roku 2011 warto zwrócić uwagę na kształcenie takich podstawowych umiejętności, jak:

- strategie rozwiązywania zadań zamkniętych,
- tworzenie prostych modeli matematycznych do zadań praktycznych,
- rozumienie pojęć (a nie opieranie się w rozwiązaniu na znanych algorytmach),
- dobór optymalnych sposobów (strategii) rozwiązania problemów matematycznych,
- argumentowanie i rozumowanie w prostych sytuacjach algebraicznych i geometrycznych,
- czytelne zapisywanie toku myślenia,
- sprawne posługiwanie się *Zestawem wybranych wzorów matematycznych.*

Ważne jest, aby maturzyści uważnie czytali i analizowali treść zadań, a następnie udzielali zwięzłej i precyzyjnej odpowiedzi, zgodnej z przedstawionym poleceniem. Uczniowie przygotowujący się do egzaminu maturalnego z matematyki powinni korzystać między innymi z materiału ćwiczeniowego, jakim są arkusze egzaminacyjne umieszczone na stronach internetowych CKE i OKE, a przede wszystkim z *Informatora maturalnego z matematyki od 2010 roku*.